НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ЛИТОВСКОЙ ССР
ПЕДАГОГИКА И ПСИХОЛОГИЯ, XII, 1973

К МЕТОДИКЕ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЙ: АКСИОМА, ТЕОРЕМА, ОПРЕДЕЛЕНИЕ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ VI КЛАССА. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МЕТОДОМ ОТ ПРОТИВНОГО

Н. М. ЛЫСОВА, В. П. ДРЕГУНАС

Методическая разработка в помощь учителю

Предисловие

Настоящая разработка представляет собой один из возможных вариантов беседы учителя с учащимися при введении понятий: аксиома, теорема, определение в курсе геометрии VI класса, а также при обучении учащихся доказательству методом от противного.

Разработка пишется в форме беседы с учащимися, причем предполагается, что учащиеся уже знакомы с первыми аксиомами, определениями, теоремами и их доказательствами. Ясно, что материал, изложенный в разработке, рассчитан не на один урок, однако при необходимости учитель сумеет разбить изложенный материал на части или отобрать нужный ему материал.

Нельзя рассчитывать на то, что учащиеся сразу, после однократного изложения рассматриваемого ниже материала все поймут и запомнят. Над такими понятиями, как аксиома, определение, теорема, над видами теорем и их взаимосвязью, над разъяснением сущности метода от противного необходима постоянная кропотливая, систематическая работа.

Можно с уверенностью сказать, что умело поставленная работа над вышеперечисленными вопросами окажет заметное влияние на улучшение качества знаний учащихся по математике, на развитие их логического мышления.

Понятие аксиомы, теоремы, определения

Слово **геометрия** — греческое и в переводе на русский язык означает **землемерие**. И это вполне понятно. Ведь геометрия возникла вначале как наука об измерении земли. Вы, наверное, помните из уроков географии и истории о древнем Египте, расположенном в восточной части плодородной реки Нил, о том, что эта река ежегодно при разливах смывала межевые знаки земельных участков, заставляя египтян заново их восстанавливать. И чтобы оградить себя от несчастий, люди строили дамбы, плотины. А ведь для этого надо было знать геометрию, т. е. землемерие.

Таким образом, сама жизнь заставляла древних египтян (и не только египтян) заняться геометрией. Она была нужна для строительства гробниц царей, пирамид, каналов.

В Вавилоне, Индии, Китае тоже строили водные сооружения, различные огромные здания, определяли объемы сосудов, изучали звездное небо и тоже накопили большие знания по геометрии.

А в III веке до н. э. грек Евклид, математик и философ, замечательной души, скромный и одновременно независимый человек, собрал все эти сведения, многое усовершенствовал и объединил в своих 13 книгах, которые назвал «Начала» и которые сейчас называются «Началами Евклида», а геометрия, которую мы с вами изучаем, называется по его имени евклидовой.

С течением времени понятия геометрии развивались и составили, наконец, обширную науку, применение которой в настоящее время чрезвычайно велико и разносторонне, так что первый ее предмет — землемерие или межевание (от слова межа) стал самой маловажной ее частью.

И сейчас мы можем сказать, что без знания геометрии у нас не было бы зданий школ, жилых домов, не было бы электростанций, дающих нам электрический ток, а это значит, что не было бы у нас ни электрического света, ни машин, ни станков, ни телевидения, не говоря уже о космических ракетах.

Теперь все труднее и труднее становиться назвать такую профессию, для которой знания геометрии не были бы нужны. Но геометрия учит не только измерять длины, площади, объемы тел, она учит — и это тоже очень важно — **правильно рассуждать**, учит делать правильные выводы, вскрывать ошибки в рассуждениях, другими словами, учит построению **правильных доказательств**. А кому не хочется правильно рассуждать, уметь выходить победителем в спорах, кому из вас не хочется и не приходится убеждать других в своей правоте? А иногда важно и другое — понять, почему ты неправ.

Так вот и этому научиться поможет вам серьезное и настойчивое изучение математики и в особенности геометрии.

Конечно, путь к познанию геометрии, как и вообще математики, труден. А иначе и быть не может, потому что сама жизнь сложна и вынуждает порою искать не самое легкое, а самое трудное. Но поверьте, если вы полюбите трудное, оно станет для вас легче легкого.

А сейчас познакомимся с тем, как строится эта интереснейшая наука.

Если посмотреть вокруг, то можно заметить, что мы со всех сторон ограничены, отделены, например, от той части пространства, которую мы просто называем улицей. Чем ограничены? Стенами, например, класса, в котором мы сидим, окнами, потолком и т. д. Причем, если внимательно присмотреться и задуматься, то можно обнаружить, что эти границы бывают следующих родов: 1) в виде точки, 2) в виде линии, 3) в виде поверхности.

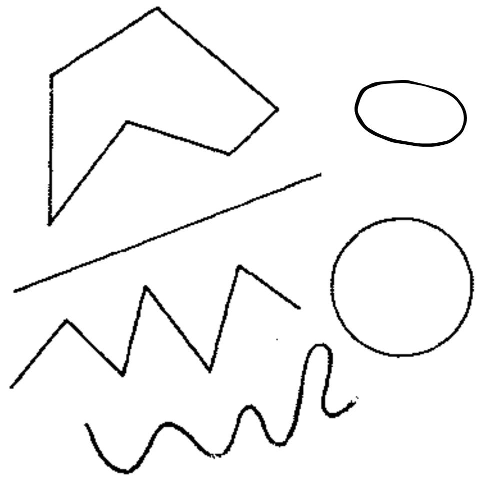

Рис. 1

Все эти границы в окружающей нас природе существуют в единстве, в связи; другими словами, мы не можем увидеть точку, не увидев линию и поверхность, прямую линию отдельно от поверхности, увидеть поверхность, не увидев, например, линию. Если дать название такого рода границам, появляется, как говорят, — **понятие точки, понятие линии, понятие поверхности.** Но так как линии бывают разнообразные (см. рис. 1), то из множества различного вида линий выделили линии, подобные туго натянутой нити, и дали им название **прямых** линий. Поверхность, похожую на поверхность стекла или воды при тихой погоде, назвали плоской или **плоскостью.**

Эти три понятия: точка, прямая, плоскость являются первоначальными и считаются **основными** понятиями геометрии. Как видно, возникли они из природы, из свойств различных тел, опытным путем.

Но так как в природе объекты, соответствующие этим понятиям, вступают в различные соединения, образуя разнообразные формы тел, то встает вопрос о свойствах самих этих объек-

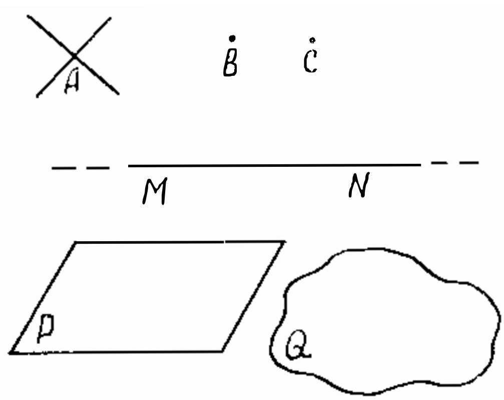

Рис. 2

тов — точек, прямых, плоскостей и их соединений. А для того, чтобы изучить свойства точек, прямых, плоскостей и их сочетаний, мы отвлекаемся в математике от материала тел, цвета, запаха и других их свойств, а изучаем только размеры и форму тел и договариваемся изображать точку, прямую, плоскость, например, так, как показано на рисунке 2. Теперь начинаем выявлять их свойства. Возьмем прямую линию и попытаемся продолжить ее. Оказывается, такое продолжение можно совершать безгранично в двух направлениях. Этот факт выражается следующим предложением: 1) **прямая линия бесконечна.**

Выходит, на доске, на листе бумаги мы изображаем только часть прямой линии.

А теперь возьмем на плоскости какие-либо две точки: *A* и *B*. Проведем через них прямую. Оказывается, можно так провести прямую, что обе точки будут лежать на этой прямой. Берем две другие точки — *C* и *D* (рис. 3). Оказывается, и через эти две точки можно провести прямую. А вот если взять три точки: *M*, *P* и *K*, то оказывается, что не через всякие три точки можно провести прямую, т. е. существуют та-

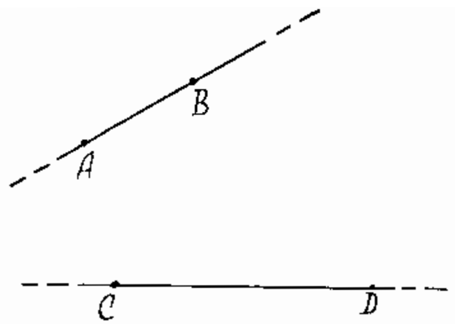

Рис. 3

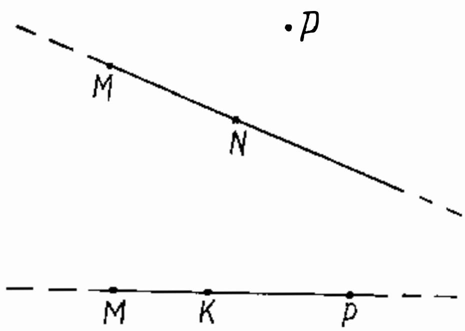

Рис. 4

кие три точки на плоскости, которые не принадлежат одной прямой (см. рис. 4).

Если же попытаться через две точки *A* и *B* провести вторую прямую, то оказывается, что она сливается с первой прямой.

Таким образом, появляется следующее математическое предложение или утверждение: **через две любые точки можно провести прямую линию и притом только одну** (2). Или иначе: существует только одна прямая, проходящая через две данные точки.

Оба эти предложения (1 и 2) являются первыми предложениями геометрии, а потому никаким другим образом, кроме опытной проверки, не могут быть обоснованы, т. е. доказаны, **но миллиарды раз человек проверял эти факты и не пришел к другому заключению.**

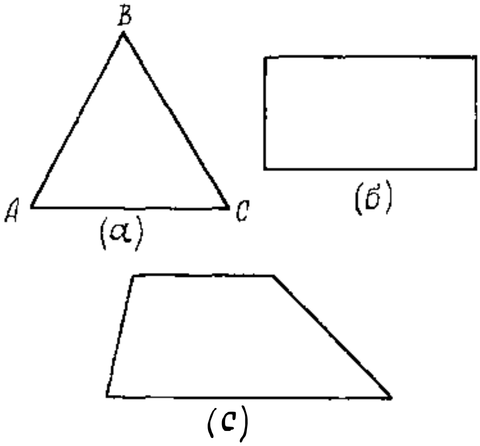

Рис. 5

Если же теперь рассматривать прямые в различных сочетаниях, то можно заметить, что фигуры, составленные отрезками прямых, обладают различными свойствами.

Например, фигура (*а*), (рис. 5), которая, как известно, называется треугольником, обладает таким свойством:

Если в $\triangle ABC$ $AB=BC$, то $\angle A=\angle C$ или иначе: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, (3) или

Внешний угол любого треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним, (4) или

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны между собою (5) и т. д.

В справедливости предложений 3, 4, 5, и многих других предложений геометрии мы убеждаемся не путем измерений, а путем рассуждений, которые носят название **доказательства**.

Почему мы не имеем права говорить о справедливости, например, предложения (3) после измерения углов *A* и *C* в треугольнике *ABC*? Да потому, что в предложении (3) выражается уверенность в том, что во **всяком**, т. е. **в любом** треугольнике, независимо от размеров его сторон, углы *A* и *C* равны, если равны стороны *AB* и *BC*. А так как мы просто не в состоянии начертить все возможные треугольники, так как их бесчисленное множество, то после опытной проверки предложения (3) даже, например, для миллиона начерченных треугольников, мы не имеем права говорить о справедливости предложения (3) для **всех** существующих треугольников, точно так же, например, как из только того факта, что 5 или даже 10 учащихся класса, скажем, не выполнили домашнего задания, учитель не имеет права и, как известно, и не делает вывода о том, что **все** учащиеся класса не выполнили домашнего задания.

Итак, в справедливости многих математических предложений мы убеждаемся путем рассуждений, которые носят название **доказательства** и строятся по определенным законам логики.

Таким математические предложения, правильность (часто говорят — истинность) которых логически обоснована, т. е. доказана, называются **теоремами.** В переводе с греческого языка — зрелище, представление.

Другими словами: математическим предложениям дают звание **теорем** во всех тех и только тех случаях, когда правильность (истинность) их логически обоснована, т. е. доказана. Ведь точно так же и в жизни: например, звание отличника учебы, скажем, за четверть, имеют право носить **все** такие ученики и **только** такие ученики, которые в течение этой четверти показали отличное знание всех изучаемых предметов, а, следовательно, у них в табеле по всем предметам оценка «5».

Те же математические предложения, правильность (истинность) которых принимается без доказательства, но в справедливости которых человечество убеждено в силу миллиардного повторения опыта, называются **аксиомами** (в переводе на русский с греческого языка — предложение, достойное уважения, бесспорное; почет, авторитет).

Часто аксиомы называют еще и **постулатами** в связи с тем, что Евклид в своих «Началах» одни предложения называл аксиомами, а другие — постулатами, но при этом не указывал, как отличить аксиомы от постулатов, постулатами тоже называя предложения, принимаемые без доказательства.

Следует очень хорошо понять и запомнить, что **аксиомы** — это первоначальные истины, которые принимаются без доказательства и которые служат для обоснования других математических предложений, **называемых теоремами**.

Есть в математике и другого рода предложения, которые содержат в себе слово «называется». Например:

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, **называется отрезком** прямой. (6)

Углом называется фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки. (7)

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию, **называются смежными.** (8)

Такие предложения, которые содержат в себе слово, **называется**, в математике (и не только в математике) носят название **определений.**

Определениями с помощью слова **называется**, как правило, вводится в науку новое слово, новый термин. Делается это для того, чтобы можно было короче и быстрее выражать свои мысли. Например, после введения определения угла появилась возможность такое длинное предложение, как, скажем, «Начертите фигуру, образованную двумя лучами, выходящими из одной точки» заменить значительно более коротким: «Начертите угол». Это

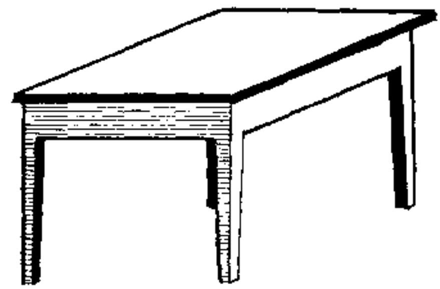

Рис. 6.

очень удобно, так как дает возможность экономить время при рассуждениях, лучше понимать друг друга, да иначе просто и невозможно было бы обмениваться друг с другом мыслями. Ведь после того, как человек дал одно и то же название какой-то группе явлений или предметов, стало возможным понимать друг друга. Например, всем предметам такой формы, как на рис. 6, он дал название **стол**, а предметам такой формы, как на рис. 7, дал название **книга** и теперь, если один другому говорит: «Я купил в магазине **книгу**», мы понимаем представляем в целом, что это за вещь, для чего она служит, хотя можем и не знать, какой она, скажем, толщины, цвета, содержания. Но в отличие от математики в жизни мы не всем явлениям и предметам даем точные определения — просто не всегда это требуется. Например, какая надобность заниматься точным определением, скажем, понятия **тарелка** или ложка, когда вполне достаточно того, что после произнесения этих слов мы хорошо представляем, о чем идет речь, знаем, для чего эта вещь служит, можем из множества предметов выбрать именно эту вещь. Однако в некоторых ситуациях, возможно, и может встать вопрос об определении понятия тарелка. Но если

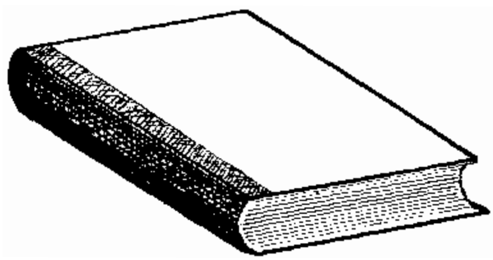

Рис. 7

бы сейчас кто-нибудь из нас начал заниматься проблемой определения понятия тарелка, то эта работа никакой другой реакции, кроме смеха, наверное, не вызвала бы.

Но вот в 1967 г. на Генеральной Ассамблее Организации Объединенных Наций очень остро встал вопрос о необходимости ускорения разработки определения понятия **агрессия** в свете современной международной обстановки в связи с преступными действиями американцев во Вьетнаме. Это определение необходимо было, с одной стороны, затем, чтобы затруднить, помешать агрессору маскировать свои преступные действия, а с другой — наличие точного определения понятия **агрессия** облегчило бы работу Совета Безопасности при рассмотрении конкретных актов агрессии для принятия определенных решений по отношению к таким действиям. Разработкой таких определений понятий, как агрессия, война и др., занимаются другие науки, с которыми вы познакомитесь позднее.

Таким образом, сама жизнь заставляет нас в определенных ситуациях строить точные определения понятий. Выработались и определенные правила построения определений, с которыми вы будете знакомиться в процессе изучения математики. А пока запомните, что предложением, которое носит название **определения**, вводится новый термин в науку. Так, например, в геометрии существуют определения отрезка, луча, угла, треугольника, многоугольника, параллельных, скрещивающихся прямых и т. д. И для того, чтобы хорошо понимать и знать, о чем идет речь, необходимо очень хорошо *понимать* и *помнить* определения понятий, особенно тех, на которые опирается доказательство той или иной теоремы.

А сейчас вернемся к математическим предложениям, которые носят название теорем.

Итак, мы уже сказали, что в математике **теоремами** называются предложения, правильность (или истинность, т. е. соответствие действительности) которых логически обоснована, т. е. доказана.

Строение теорем

Как было уже сказано, не всякое математическое предложение можно назвать теоремой. Например, предложения: «Если два угла равны, то они вертикальны» или «Если число делится на 5, то оно оканчивается нулем» не являются теоремами, так как они не верны, говорят еще — они **ложны**.

Существуют и такие математические (и не только математические) предложения, относительно которых мы не можем сказать истинны они или ложны, так как доказательства их еще не найдены, хотя и имеются некоторые основания утверждать, что они верны.

Такие уже сформулированные предложения, истинность которых еще не доказана во всей своей общности, носят название **гипотезы**. Например, до сих пор еще существует так называемая гипотеза или говорят еще — проблема Гольдбаха—Эйлера, которая формулируется так:

Всякое четное число, большее или равное 6, есть сумма двух простых чисел, а всякое нечетное число, большее или равное 9, есть сумма трех простых чисел.

Например,

$8=3+5$, $10=5+5$, $26=23+3$,
а $19=5+7+7$, $21=3+7+11$, $23=19+2+1$.

Во всякой теореме можно выделить объект, относительно которого что-либо утверждается или отрицается; другими словами — во всякой теореме указывается на наличие или отсутствие у рассматриваемого объекта какого-либо свойства или, говорят, признака (а, возможно, и нескольких свойств).

Например, в теореме

Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собою

объектом рассмотрения является равнобедренный треугольник (любой треугольник, но обязательно равнобедренный). Относительно этого объекта — равнобедренного треугольника — утверждается, что углы при его основании равны.

В теореме

Внешний угол всякого треугольника больше каждого внутреннего угла этого треугольника, не смежного с ним

объектом рассмотрения является внешний угол треугольника (имеется в виду любой из внешних углов произвольного, т. е. любого треугольника). Относительно этого объекта — внешнего угла треугольника — утверждается, что он больше каждого из тех двух внутренних, который не является смежным с ним.

В теореме

Всякое число, не делящееся на 3, не делится на 9

объектом рассмотрения является любое число, не делящееся на 3. Относительно этого числа отрицается свойство — делиться на 9.

Такая форма строения теорем, в которых выражается знание о принадлежности или непринадлежности объекту какого-либо свойства, называется **категорической** формой.

В этих случаях говорят, что теорема сформулирована в форме категорического суждения.

Но часто в теоремах четко указываются условия, при которых рассматривается объект, и свойства, которыми данный объект при выполнении данных условий обладает.

Например,

Если сумма цифр числа делится на 9, то это число делится на 9. (9)

Или:

Если в одном и том же круге две дуги равны, то равны и соответствующие им центральные углы. (10)

В теоремах в таких случаях присутствуют слова: «если», «то».

Та часть теоремы, которая начинается со слова «если», до слова «то», называется **условием** теоремы. Остальная же часть теоремы, начинающаяся со слова «то», называется **заключением** теоремы. Такая форма построения теорем называется **условной** или **силлогистической**. Так, в теореме (9) условие: «Если сумма цифр числа делится на 9», заключение: «то это число делится на 9». В теореме (10) условие: «Если в одном и том же круге две дуги равны», заключение: «то равны и соответствующие им центральные углы».

Различают теоремы **простые** и **сложные.**

Теоремы, которые содержат в себе одно условие и одно заключение, называются **простыми**. Теорему (9) можно назвать простой, так как в ней одно условие: сумма цифр числа делится на 9, и одно заключение: само это число делится на 9. Теорему (10) по той же причине можно назвать простой.

Теоремы, которые содержат в себе более одного условия или более одного заключения, называются **сложными**. Так, в теореме

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (11)

более одного условия, хотя и одно заключение, поэтому эту теорему можно назвать сложной теоремой.

Замечание: деление теорем на простые и сложные не носит абсолютного характера, т. е. об одной и той же теореме нельзя абсолютно точно сказать — простая она или сложная. Объясняется это тем, что одну и ту же мысль можно выразить как простым, так и сложным суждением. Например, простое суждение «Углы смежные» можно заменить сложным «Одна сторона этих двух углов — общая, а две другие составляют прямую линию».

Виды простых теорем

Для каждого предложения, в котором **указывается на наличие** некоторого свойства у данного объекта, можно составить предложение, в котором **отрицается** наличие данного свойства у рассматриваемого объекта. Пусть имеем предложение

Данное число делится на 2. (12)

В этом предложении утверждается наличие у числа свойства — делиться на 2. А теперь сформулируем предложение, в котором **отрицается** свойство этого числа:

Данное число **не** делится на 2. (13)

Или:

Данный треугольник равносторонний (14)

и Данный треугольник **не** равносторонний, (15)

«Данное число четное», «Данное число нечетное» и т. д. В таких случаях одно предложение называется отрицанием другого предложения. Так, предложение (13) является отрицанием предложения (12) и наоборот, предложение (15) является отрицанием предложения (14) и наоборот.

Обозначим условие простой теоремы, т. е. теоремы с одним условием и одним заключением, буквой A, а заключение — буквой B; тогда коротко любую простую теорему можно записать в виде $A \to B$, где знак $\to$ стоит вместо слов «следует», «вытекает», «если...то». Читать же эту запись можно так: «Если есть A, то есть B», или «Из A следует B», или «Из A вытекает B», или «Если объект обладает свойством A, то он обладает и свойством B».

Из каждой теоремы вида $A \to B$ можно составить еще три вида предложений: а) поменяв местами условие и заключение данной теоремы. Полученное предложение будет иметь вид: $B \to A$. Читать его можно так: «Если есть B, то есть A», «Из B следует A», «Из B вытекает A» и т. д. б) Взяв условием и заключением отрицание соответственно условия и заключения данной теоремы. Обозначим отрицание наличия свойства A у какого-либо объекта через $\overline{A}$, а отрицание наличия свойства B — через $\overline{B}$, читать же эти записи будем коротко так: «не A», «не B». Полученное предложение будет иметь вид: $\overline{A} \to \overline{B}$, а читать его можно так: «Если есть не A, то есть не B» или «Из не A следует не B», «Из не A вытекает не B» и т. д. в) В полученном предложении поменяв местами условие и заключение. Новое предложение будет иметь вид: $\overline{B}\longrightarrow\overline{A}$, а читать его можно так: «Если есть $\overline{B}$, то есть $\overline{A}$», «Из не B следует не A», «Из не B вытекает не A», «Если объект обладает свойством $\overline{B}$, то он обладает и свойством $\overline{A}$».

Итак, получили 4 вида предложений:

I. $A\longrightarrow B$ (прямое).
II. $B\longrightarrow A$ (обратное).
III. $\overline{A}\longrightarrow\overline{B}$ (противоположное).
IV. $\overline{B}\longrightarrow\overline{A}$ (обратное противоположному).

Если I предложение назовем **прямым** предложением, тогда II предложение называется **обратным** прямому, III — **противоположным** прямому, IV — **обратным противоположному** (прямому) или **противоположным обратному.**

Пример 1. I. Если два угла вертикальные, то они равны между собой (прямое).

II. Если два угла равны между собой, то они вертикальные (обратное).

III. Если два угла не вертикальные, то они не равны между собой (противоположное).

IV. Если два угла не равны между собой, то они не вертикальные (обратное противоположному).

Пример 2. I. Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3.

II. Если число делится на 3, то и сумма его цифр делится на 3.

III. Если сумма цифр числа не делится на 3, то это число не делится на 3.

IV. Если число не делится на 3, то и сумма цифр его не делится на 3.

Посмотрим теперь, какая связь существует между этими четырьмя видами условных предложений, т. е., если, скажем, мы уже знаем, что какое-то одно из четырех предложений верно (истинно), что можно сказать об остальных трех видах предложений? Можно ли из знания об истинности или ложности одного из четырех видов предложений сделать заключение соответственно об истинности или ложности остальных трех видов предложений? Прежде чем ответить на этот вопрос, пронаблюдаем, каким образом мы делаем те или иные заключения в жизни.

Пусть, например, у некоторого учителя математики строго соблюдается правило: если ученику **ставится** оценка в журнал, то она же **ставится** ему и в дневник. Зная, что это правило выполняется у учителя **всегда,** может ли, скажем, мама ученика этой учительницы, не видя оценки в дневнике своего сына (не видя, потому что ее нет в дневнике, нечестность сына исключается), сделать заключение о том, что и в журнале за этот день у ее сына нет оценки? Конечно, может, но при условии, как было сказано, что вышеописанное правило **не нарушается** учителем **никогда.** Т. е. из справедливости предложения.

Если ученику не поставлена оценка в журнал, (A) то она ему не поставлена и в дневник ($\overline{B}$)

мы делаем заключение о справедливости предложения

Если ученику не поставлена оценка в дневник, ($\overline{B}$) то она ему не поставлена и в журнал. ($\overline{A}$)

Значит, из истинности предложения $A\longrightarrow B$ сделано заключение об истинности предложения $\overline{B}\longrightarrow\overline{A}$.

Или, например, пусть вас интересует вопрос, исполнилось ли вашему товарищу, скажем, Сереже, 14 лет или ему нет еще 14 лет. И предположим, что ни лично от него, ни от других прямого ответа на этот вопрос вы получить не можете. Тогда вы ищете другой путь. Например, вы точно знаете, что его недавно приняли в члены ВЛКСМ. Этот факт дает вам право сделать вывод о том, что вашему товарищу исполнилось 14 лет. На каком основании вы делаете такое заключение? Вы рассуждаете примерно так: в нашей стране в члены ВЛКСМ принимаются **только** люди, достигшие 14-летнего возраста, т. е. до исполнения 14 лет в члены ВЛКСМ не принимают. Значит, если Сережа член ВЛКСМ, то ему исполнилось 14 лет, так как если бы ему не было 14 лет, то он не был бы членом ВЛКСМ.

Заключение об истинности предложения:

Если Сережа член ВЛКСМ *(A)*, то ему исполнилось 14 лет *(B)* вы сделали из знания об истинности предложения:

Если бы Сереже не исполнилось 14 лет ($\bar{B}$), то он не был бы членом ВЛКСМ ($\bar{A}$),

т. е. из истинности предложения $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ сделано заключение об истинности предложения $A \rightarrow B$.

А теперь рассмотрим несколько знакомых вам примеров из математики.

Пример 1. Из геометрии известно, что вертикальные углы равны между собой. Сформулируем эту теорему в виде условного предложения:

Если два угла вертикальные *(A)*, то они равны между собой *(B)*. (16)

Итак, предложение (16) справедливо или истинно. А теперь выясним, справедливо ли предложение, обратное противоположному предложению (16), т. е. предложение:

Если два угла не равны между собой ($\bar{B}$), то они не вертикальные ($\bar{A}$). (17)

Оказывается, что предложение (17) тоже справедливо. Справедливость его в геометрии не доказывается, потому что она вытекает из справедливости предложения (16).

Пример 2. Предположим, что мы знаем, что сумма двух каких-либо углов не равна $2d$. Имеем ли мы право сделать заключение, что эти два угла не смежные? То есть справедливо ли предложение:

Если сумма двух углов не равна $2d$, то они не смежные. (18)

Любой ответит, что это предложение справедливо. Но откуда следует его справедливость? Оказывается, что это предложение является обратным противоположному предложению:

Если два угла смежные, то их сумма равна $2d$, (19)

истинность которого в геометрии доказана. А потому после доказательства предложения (19) предложение (18) уже не требует доказательства, истинность его вытекает из истинности предложения (19).

Пример 3. Из арифметики известно, что

если **каждое** слагаемое делится без остатка на какое-нибудь число, то и сумма их **делится** на это число (20)

Доказательство этого предложения существует в математике. Итак, это предложение справедливо. Сформулируем предложение, обратное противоположному предложению (20):

Если сумма **не делится** на какое-либо число, то **не каждое** слагаемое этой суммы делится без остатка на это число. (21)

Это предложение тоже верно. Например, 36 не делится на 7, но 36 равно $16+20$. Ни 16, ни 20 не делятся на 7. Или $36=14+22$. 14 делится на 7, но 22 не делится на 7. И как бы мы ни раскладывали число 36 на сумму двух (а можно и более) слагаемых, мы не сможем найти таких слагаемых, дающих в сумме 36, которые одновременно делились бы на 7. Действительно,

$$36=1+35=2+34=3+33=4+32=$$
$$=5+31=6+30=7+29=8+28=$$
$$=9+27=10+26=11+25=$$
$$=12+24=13+23=14+22=$$
$$=15+21=16+20=17+19=$$
$$=18+18.$$

Ни в одном случае нет двух таких слагаемых, каждое из которых делилось бы на 7. После того, как доказана справедливость предложения (20), предложение (21) уже не требует доказательства, оно обязательно справедливо. И так всегда, если предложение (I) справедливо, т. е. истинно, то и предложение (IV) истинно, и обратно: если предложение (IV) истинно, то и предложение (I) истинно. Если же предложение (I) ложно, то и предложение (IV) ложно, и обратно: если предложение (IV) ложно, то и предложение (I) ложно.

Аналогичная связь существует и между предложениями вида (II) и (III), т. е. предложения (II) и (III) либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Исходя из сказанного, можно сделать для себя очень важный **вывод**: 1) если мы хотим доказать какое-либо предложение, которое может быть представлено в виде $A \rightarrow B$, достаточно построить предложение вида $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$, доказать его справедливость (истинность), чтобы сделать заключение о справедливости данного предложения $A \rightarrow B$. 2) Если же нам дано предложение вида $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$, то достаточно доказать предложение вида $A \rightarrow B$, чтобы сделать заключение о справедливости данного предложения $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$. Такой прием доказательства предложений, который сводится к доказательству предложения, обратного противоположному данному, называется **методом от противного.** Более подробно об этом методе будем говорить позднее.

Предложения (I) и (IV), а также (II) и (III) называются **равносильными,** т. е. истинность одного из них влечет за собою истинность другого. Предложения (I) и (IV), (II) и (III) могут быть и одновременно ложными, но не может быть такого случая, когда, скажем, предложение вида (I) истинно, а предложение вида (IV) ложно или предложение вида (II) истинно, а предложение вида (III) ложно и наоборот. Например, из справедливости теоремы:

Если в одном и том же круге две дуги **равны,** *то* **равны** *и соответствующие им центральные углы*

можно немедленно, т. е. без доказательства сделать заключение и о справедливости такого предложения:

Если в одном и том же круге два центральных угла **не равны,** *то* **не равны** *и соответствующие им дуги.*

После доказательства теоремы:

Если в треугольнике две стороны **равны** *между собой, то равны и противолежащие им углы треугольника*

немедленно следует справедливость и такого предложения:

Если в треугольнике два угла **не равны** *между собой, то* **не равны** *и противолежащие им стороны треугольника.*

Совершенно иначе обстоит дело, когда речь идет о справедливости прямого и обратного предложений, т. е. о предложениях вида (I) $A \rightarrow B$ и (II) $B \rightarrow A$ или (III) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$ и (IV) $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$. Дело в том, что из справедливости одного из них нельзя сделать заключения о справедливости другого. Например, справедливость предложения:

Если число делится на 6, то оно делится на 2

не влечет за собою справедливость предложения:

Если число делится на 2, то оно делится на 6. Действительно, есть такие числа, которые делятся на 2, но не делятся на 6, например, 22, 10, 14, 38 и т. д. Или, совершенно ясно, что из истинности предложения:

Если человеку нет 14 лет, то он не член ВЛКСМ

не следует истинность обратного ему предложения:

Если человек не член ВЛКСМ, то ему нет 14 лет, например, все люди после 30-летнего возраста не являются членами ВЛКСМ. Но может случиться и так, что справедливы оба предложения: прямое и обратное. Например, предложение:

Если число делится на 3, то сумма его цифр делится на 3 и ему обратное:

Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3

одновременно справедливы. Справедливы одновременно и два следующих взаимно обратных предложения:

Если точка лежит на перпендикуляре к отрезку, проведенному через его середину, то она одинаково удалена от концов этого отрезка и

Если точка одинаково удалена от концов отрезка, то она лежит на перпендикуляре к этому, проведенному через его середину.

Два же следующих взаимно обратных предложения:

Если число делится на 5, то оно делится на 6

и

Если число делится на 6, то оно делится на 5

одновременно ложны. Действительно, число, например, 45 делится на 5, но не делится на 6, а число 36 делится на 6, но не делится на 5.

Итак, прямое предложение и ему обратное могут быть: 1) одновременно истинными, 2) одновременно ложными, 3) одно истинным, другое ложным. Значит, справедливость предложения, обратного данному, не зависит от справедливости прямого предложения. Каждое из них в одинаковой мере нуждается в специальном доказательстве его справедливости (истинности) или ложности.

Подведем итог. Существует 4 вида условных предложений:

$$\text{(I)}\ A \to B \qquad \text{(III)}\ \bar{A} \to \bar{B},$$
$$\text{(II)}\ B \to A \qquad \text{(IV)}\ \bar{B} \to \bar{A}.$$

Истинность предложения (I) влечет за собой истинность предложения (IV), и обратно: истинность предложения (IV) влечет за собою истинность предложения (I). Аналогично — ложность предложения (I) влечет со собою ложность предложения (IV), и обратно: ложность предложения (IV) влечет за собою ложность предложения (I).

Истинность предложения (II) влечет за собою истинность предложения (III), и обратно. Ложность предложения (II) влечет за собою ложность предложения (III), и обратно.

А сейчас подробнее на конкретных примерах проследим процесс доказательства геометрических теорем методом от противного.

Доказательство методом от противного

Первая теорема, которая в школьном учебнике по геометрии доказывается методом от противного — теорема о единственности перпендикуляра к прямой, проведенного из точки, взятой вне этой прямой.

Читается она так:

Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр. (1)

Если сформулировать эту теорему в виде условного предложения, то это мы должны были бы сделать следующим образом:

Если внешний угол треугольника **больше** каждого внутреннего, не смежного с ним (A), то из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только **один** перпендикуляр (B). (2)

Для доказательства этого предложения достаточно доказать предложение, обратное противоположному данному, т. е. вида $\bar{B} \to \bar{A}$, если прямое $A \to B$. Сформулируем его:

Если из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой **не один** перпендикуляр, то внешний угол треугольника **не больше** каждого внутреннего, не смежного с ним. (3)

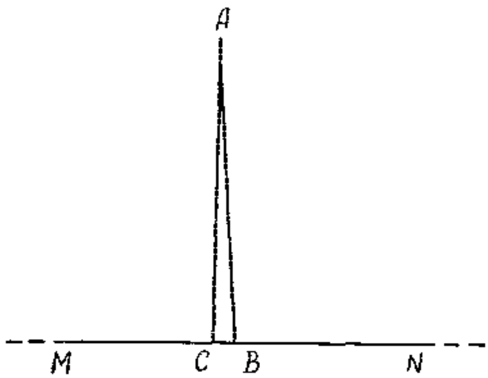

Рис. 8

Доказательство

Пусть существуют два перпендикуляра к прямой MN, проходящих через данную точку A: AB и AC. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 8). В нем $\angle ACB$ — прямой, $\angle ABN$ — внешний угол этого треугольника и тоже прямой. Получается, что внешний угол ($\angle ABN$) треугольника ABC равен внутреннему ($\angle C$), не смежному с ним, а, следовательно, **не больше** каждого внутреннего, с ним не смежного.

Итак, предложение (3) верно, а, следовательно, верно и предложение (2). А так как внешний угол любого треугольника больше внутреннего, с ним не смежного (эта теорема доказывается раньше теоремы (1)), то из справедливости предложения (2) вытекает и справедливость его заключения, т. е. предложение: «Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр» тоже справедливо, истинно, а поэтому в учебниках геометрии оно обычно отделяется от условия теоремы (2) и формулируется отдельно в виде утвердительного суждения.

А теперь рассмотрим доказательство методом от противного теоремы:

В треугольнике против равных углов лежат и равные стороны. (4)

Сформулируем эту теорему в виде условного предложения:

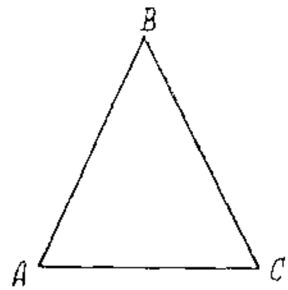

Рис. 9

Если в треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$ (см. рис. 9). (5)

Для доказательства истинности предложения (5) достаточно доказать истинность предложения, обратного противоположному предложению (5), т. е. такого предложения:

Если в треугольнике ABC $AB \neq BC$, то $\angle A \neq \angle C$. (6)

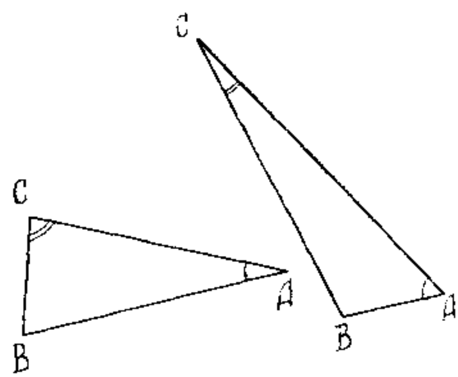

Рис. 10

Доказательство

В $\triangle ABC$ $AB \neq BC$, это означает, что:

а) либо $AB > BC$,

в) либо $AB < BC$ (см. рис. 10).

Но если $AB > BC$, то по теореме: *«Против большей стороны в треугольнике лежит и больший угол»* $\angle C > \angle A$; если же $AB < BC$, то по той же теореме $\angle C < \angle A$. Итак, если в $\triangle ABC$ $AB \neq BC$, то либо $\angle C > \angle A$, либо $\angle C < \angle A$, а это означает, что $\angle C \neq \angle A$.

Истинность предложения (6) доказана, теперь из истинности предложения (6) делаем заключение об истинности предложения (5), что и требовалось доказать.

Рассмотренные две теоремы относятся к простым теоремам, т. е. к теоремам, содержащим одно условие и одно заключение, имеющим вид: $A \to B$, где A — единственное условие теоремы, а B — единственное заключение теоремы.

Вывод: при доказательстве методом от противного предложений вида $A \to B$ составляется предложение, обратное противоположному данному, т. е. вида $\bar{B} \to \bar{A}$. Доказывается его справедливость (истинность), а затем из справедливости предложения $\bar{B} \to \bar{A}$ делается заключение о справедливости, т. е. истинности данного предложения $A \to B$.

Кафедра методики физики и математики
ВГПИ

Поступило
в октябре 1971 г.