НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ЛИТОВСКОЙ ССР.
ПЕДАГОГИКА И ПСИХОЛОГИЯ VI, 1964

О ПРЕПОДАВАНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

В. П. ДРЭГУНАС

До введения новых программ по математике в РСФСР некоторые сведения по стереометрии рассматривались в курсе арифметики V класса. Это — поверхность* и объем куба и прямоугольного параллелепипеда, поверхность и объем цилиндра. Изучение стереометрии ограничивалось этим материалом, и учащиеся до X класса не изучали пространственных фигур. Выпускники семилетней школы из-за недостатка знаний по стереометрии имели слабые пространственные представления и пространственное воображение и поэтому часто ощущали трудности как в практической работе на производстве, так и при дальнейшем изучении в школе таких дисциплин, как физика, география, черчение и др.

Этот существенный пробел в знаниях учащихся в частности ликвидируется перестройкой структуры школы, введением новых программ по математике. По новым программам часть материала по стереометрии перенесена в курс геометрии восьмилетней школы — школы всеобщего обучения.

В программу VII класса включены такие вопросы: вычисление площади поверхности прямой призмы; измерение объема, объем куба, объем прямоугольного параллелепипеда, треугольной и четырехугольной прямой призмы; цилиндр, его развертка, поверхность и объем цилиндра.

В программу VIII класса включен следующий материал: вычисление поверхностей правильных призм и правильной пирамиды; объем пирамиды (опытным путем); вычисление поверхностей и объемов геометрических тел по готовым данным и по данным, полученным путем непосредственного измерения (конус, шар и другие тела с учетом производственного опыта учащихся).

На изучение этих сведений по стереометрии отводится программой приблизительно 38 часов.

Иначе обстоит дело в восьмилетней школе Литовской ССР. Чтобы яснее представить себе различия, которые имеются в изучении сведений по стереометрии в восьмилетней школе нашей республики и в восьмилетней школе РСФСР, мы приводим таблицы распределения часов на изучение математики в восьмилетней школе:

* Ради краткости вместо выражения «площадь поверхности тела» употребляем выражение «поверхность тела».

1) В нашей республике

Учебные предметы	Классы				Общее число уроков
	V	VI	VII	VIII	
Арифметика	6	3	—	—	324
Алгебра	—	3	2	3	289
Геометрия	—	—	3	2	178
Всего	6	6	5	5	791

2) В РСФСР

Учебные предметы	Классы				Общее число уроков
	V	VI	VII	VIII	
Арифметика	6	4/0	—	—	280
Алгебра	—	0/4	4/3	3/2	290
Геометрия	—	2	2/3	2/3	253
Всего	6	6	6	5	823

Из приведенных таблиц видно, что:

1) в нашей восьмилетней школе на изучение математики выделено на 32 часа меньше, чем в восьмилетней школе РСФСР; это объясняется тем, что учащиеся в нашей республике, кроме русского языка, изучают родной литовский язык;

2) на изучение арифметики в нашей республике выделено на 44 часа больше, а на изучение геометрии — на 76 часов меньше, чем в РСФСР; на изучение алгебры отводится то же самое число уроков (289 и 290);

3) изучение геометрии в нашей школе начинается с VII класса, а в школе РСФСР — с VI класса.

Уменьшение общего числа уроков на изучение геометрии в нашей школе является основной причиной снижения знаний учащихся по этому предмету. Мы придерживаемся того мнения, что надо уменьшить число уроков на изучение арифметики и за счет этого увеличить число уроков на изучение геометрии. Это можно разрешить, например, так: со II полугодия в VI классе вместо арифметики преподавать геометрию (3 недельные часа, всего 60 часов).

По ныне действующим программам изучение сведений по стереометрии в нашей восьмилетней школе должно проводиться в курсе арифметики V и VI классов и в курсе геометрии VIII класса. В курсе арифметики V класса при изучении обыкновенных дробей рассматривается объем куба и прямоугольного параллелепипеда, а при изучении десятичных дробей — поверхность и объем куба и прямоугольного параллелепипеда. В курсе арифметики VI класса выделена тема «Геометрический материал», в которую включен цилиндр, его развертка, поверхность и объем цилиндра (без доказательства).

В курс геометрии VIII класса включен следующий материал: прямая призма; вершины, ребра, грани призмы и взаимное расположение их; понятие измерения объема; объем куба и прямоугольного параллелепипеда, прямой четырехугольной и треугольной призмы (без доказательства); вычисление поверхностей и объемов геометрических моделей и простейших деталей, с которыми учащиеся знакомы из работы в школьных мастерских; правильная призма; правильная пирамида; поверхность и объем пирамиды (без доказательства); вычисление поверхностей и объемов геометрических тел (призмы, пирамиды; цилиндра) по данным, полученным путем непосредственного измерения.

На изучение сведений по стереометрии в нашей восьмилетней школе выделено весьма небольшое число часов: на изучение темы «Геометрический материал» в курсе арифметики VI класса, в которой, кроме цилиндра, рассматриваются длина окружности и площадь круга, дается 10 часов, а в курсе геометрии VIII класса дается, примерно, 15 часов. В программу нашей восьмилетней школы вообще не включены конус и шар, несмотря на то, что эти тела очень часто встречаются в повседневной жизни людей.

Изучение материала по стереометрии в восьмилетней школе имеет большое образовательное и практическое значение. Во-первых, это дает выпускникам восьмилетней школы более законченные и более близкие к потребностям жизни знания по геометрии для успешной работы в сельском хозяйстве, в том или ином производстве. Учащиеся, продолжающие обучение в средней школе, гораздо легче и более сознательно будут изучать этот материал в X и XI классах, так как знания, приобретенные в восьмилетней школе при изучении сведений по стереометрии, получат практическое применение в повседневной жизни и при изучении школьных дисциплин учащимися. Во-вторых, знания по стереометрии, приобретенные учащимися восьмилетней школы, предоставляют учителю широкие возможности прививать учащимся умения и навыки практического измерения поверхностей и объемов простейших геометрических тел и познакомить их с методами и инструментами измерения, применяемыми на практике, т. е. дают возможность связать преподавание геометрии с жизнью, практикой коммунистического строительства.

При изучении элементов стереометрии в V—VIII классах, которые в основном состоят из вычислений поверхностей и объемов геометрических тел, мы придерживались следующих принципов:

1. Метод изучения сведений по стереометрии в восьмилетней школе должен быть научно-индуктивным с широким применением эксперимента и интуиции учащихся. В курсе математики восьмилетней школы не изучается теория пределов, на основании которой в старших классах средней школы выводятся формулы объема пирамиды, поверхностей и объемов цилиндра, конуса, шара. Поэтому на данном этапе обучения надо отказаться от строгого вывода указанных формул. Формулы для вычисления поверхностей и объемов геометрических тел должны быть разъяснены экспериментальным способом на основе рассмотрения конкретной модели. При этом указанные формулы выводятся только в области рациональных чисел. Основное внимание обращается на получение числовых результатов измерения и вычисления.

2. В основу методов обучения должна быть положена наглядность, так как у учащихся V—VIII классов очень слабо развиты пространственные представления и пространственное воображение. Этого мало, что при объяснении нового материала или при решении задач будут демонстрироваться соответствующие наглядные пособия; для того, чтобы учащиеся имели глубокие и правильные представления о геометрических телах, необходимо, чтобы, кроме наблюдения, они чертили, измеряли, вырезали пространственные фигуры, т. е. чтобы они могли убедиться в свойствах геометрических тел с помощью других чувств, особенно, осязания.

Из того, что сказано выше, следует, что при изучении сведений по стереометрии в восьмилетней школе необходимо изготовлять наглядные пособия силами учащихся. В нашей практике учащиеся изготовляли наглядные пособия при решении задач дома и при работе в школьных мастерских.

3. Изучение сведений по стереометрии необходимо сочетать с решением несложных задач прикладного характера, а также задач, данные к которым получены непосредственным измерением. Для этого надо организовать практические работы по вычислению поверхностей и объемов простейших геометрических тел и их разных сочетаний и комбинаций.

4. При изучении стереометрического материала в восьмилетней школе важно развить способность учащихся видеть пространственные тела в повседневной жизни людей. Надо научить учащихся выявлять геометрические фигуры в окружающих их предметах, в технических объектах и деталях. Это помогает им в дальнейшем быстрее научиться читать технические чертежи. Необходимо показать учащимся, где на практике встречаются предметы, имеющие форму призмы, цилиндра, пирамиды и других геометрических тел, для каких целей и какими инструментами измеряют поверхности и объемы этих предметов дорожный мастер, токарь, кровельщик-жестянщик, разметчик и другие. Желательно познакомить учащихся с приближенными формулами измерения поверхностей и объемов геометрических тел, применяемых на практике, например, с формулой измерения веса песка в конусах или со способом определения кубатуры круглого лесного материала.

5. При изучении элементов стереометрии нельзя ограничиваться только практической стороной: сообщить формулы для вычисления поверхностей и объемов геометрических тел и научить учащихся производить такие вычисления. Необходимо обратить серьезное внимание на развитие пространственных представлений, логического мышления, понятия о функциональной зависимости.

6. Изучение элементов стереометрии надо тесно связать с основным курсом планиметрии, с курсами физики и черчения, с работой учащихся в школьных мастерских.

Как уже отмечалось, основной стереометрической темой в восьмилетней школе является вычисление поверхностей и объемов простейших геометрических тел. Но, кроме этого материала, включены также некоторые сведения об основных стереометрических понятиях. При изучении темы «Прямая призма» включен вопрос о взаимном расположении ребер и граней призмы, а при изучении темы «Тригонометрические функции прямого угла» выделен вопрос «Угол между прямой и плоскостью». Эти сведения необходимы, во-первых, для полноценного усвоения учащимися основной темы стереометрии и, во-вторых, для более глубокого развития у учащихся пространственного воображения и пространственных представлений.

Материал о взаимном расположении прямых и плоскостей по программе не должен быть изложен в виде отдельной темы. Изучение этого материала должно продолжаться в течение всего времени изучения вопросов стереометрии. Первые сведения о взаимном расположении прямых и плоскостей учащиеся должны получить при изучении темы «Поверхность и объем прямой призмы». Эти сведения излагаются индуктивно-опытным путем в процессе рассмотрения различных элементов конкретных пространственных фигур (моделей и предметов окружающей обстановки). При этом с учащимися рассматриваются пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся ребра призмы, а не пересекающиеся, параллельные или скрещивающиеся прямые, пересекающиеся и параллельные грани прямоугольного параллелепипеда, а также пол и потолок комнаты, а не пересекающиеся и параллельные плоскости.

Для успешного усвоения учащимися сведений по стереометрии особое значение имеет понятие о перпендикуляре к плоскости. С помощью этого понятия определяется прямая призма, высота призмы, пирамиды, цилиндра, длина которых необходима для нахождения объемов этих тел. Поэтому естественно, что в учебнике по геометрии Н. Н. Никитина этот вопрос рассмотрен гораздо глубже и основательнее, нежели другие вопросы взаимного расположения прямых и плоскостей. В учебнике дается определение прямой, перпендикулярной к плоскости, указывается, как практически можно построить перпендикуляр к плоскости при помощи двух прямоугольных треугольников, экспериментальным способом «доказывается» признак перпендикулярности прямой к плоскости. К сожалению, в программу нашей восьмилетней школы не включен вопрос о перпендикуляре к плоскости. На наш взгляд, этот вопрос должен быть рассмотрен при изучении стереометрического материала в восьмилетней школе.

В курсе арифметики VI класса при изучении темы «Геометрический материал» учащиеся впервые знакомятся с формулами вычисления длины окружности, площади круга, поверхности и объема цилиндра. На изучение этого материала программа выделяет 10 часов. Повторно эти вопросы в курсе геометрии восьмилетней школы больше не рассматриваются и поэтому на изучение их надо обратить должное внимание. Ясно, что в VI классе нельзя дать точное доказательство формул длины окружности, площади круга, поверхности и объема цилиндра, так как это потребовало бы применения теории пределов, которая в восьмилетней школе не изучается. Также ясно, что нельзя дать учащимся готовые формулы без всяких доказательств и пояснений, т. е. рецептным способом. На этом этапе обучения надо разъяснить учащимся в доступной форме справедливость этих формул, широко используя наглядность и эксперимент.

В учебнике Н. Н. Никитина справедливость формул для вычисления длины окружности, поверхности цилиндра и объема пирамиды проверяется экспериментальным путем, а формулы площади круга, объема цилиндра, поверхности и объема конуса, объема шара выводятся, опираясь в неявной форме на понятие предела. Итак, в учебнике Н. Н. Никитина эти вопросы изложены непоследовательно: одни формулы проверяются путем экспериментов, другие разъясняются с помощью теории пределов. Опираться на теорию пределов, с которой учащиеся еще не знакомы, значит грубо нарушить принципы дидактики, и поэтому мы считаем, что все формулы для вычисления поверхностей и объемов геометрических тел, а также формулы длины окружности и площади круга должны быть разъяснены экспериментальным способом. В своей практике мы применяли именно экспериментальный способ разъяснения формул и пришли к выводу, что он является вполне приемлемым и наиболее доступным для учащихся восьмилетней школы. Ниже описываются те эксперименты, которые проводились нами в школах города Ленинграда и школах Литвы. Для объяснения некоторых формул опишем несколько экспериментов. Ясно, что учащихся надо познакомить с одним из указанных способов, который по мнению учителя является наиболее удачным.

Длина окружности. Покажем два способа проведения эксперимента, устанавливающего формулу длины окружности.

I способ. Перед уроком, на котором должен быть рассмотрен вопрос о длине окружности, учащимся было дано задание изготовить из фанеры, картона или жести круг произвольного радиуса (не меньшего, чем 5 см), точно измерить длину окружности и диаметр круга и найти отношение этих величин, измерения провести 2—3 раза и полученные результаты записать в такую таблицу:

Измерения	Длина окружности C	Длина диаметра D	Отношение $\frac{C}{D}$
1.			
2.			
3.			

Среднее арифметическое

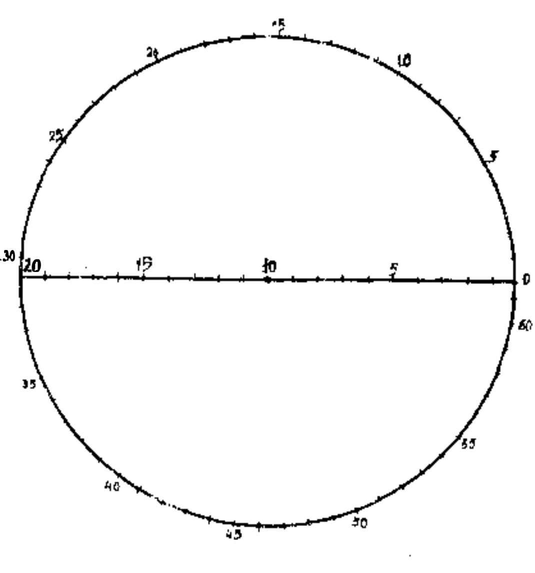
Были указаны возможные способы измерения длины окружности:

1) при помощи опоясывания круга ниткой или шнуром;

2) при помощи обкатывания круга по прямой линии, проведенной на листе бумаги.

К уроку все учащиеся изготовили модели круга, измерили длину его окружности и диаметр, нашли отношение этих величин, результаты измерения и вычисления записали в таблицы. В начале урока некоторые результаты, полученные учащимися, были записаны на доске. Рассматривая значения отношения длины окружности к длине диаметра, учащиеся установили, что эти отношения почти у всех получились одинаковыми и близкими к числу 3,14, несмотря на то, что круги были изготовлены весьма разных размеров. Тогда учитель указал, что точные измерения показывают, что это отношение является постоянным числом для круга любого диаметра и выражается бесконечной непериодической десятичной дробью 3,141592... Были введены обозначения П, C и D, а также формулы $C = \Pi D$ и $C = 2\Pi R$. Также было указано, что греческий ученый Архимед (около 250 лет до начала нашего летоисчисления) вычислил число П с достаточно большой точностью. Он нашел, что $\Pi \approx \frac{22}{7} \approx 3{,}1428$. Это значение числа П и до наших дней применяется на практике.

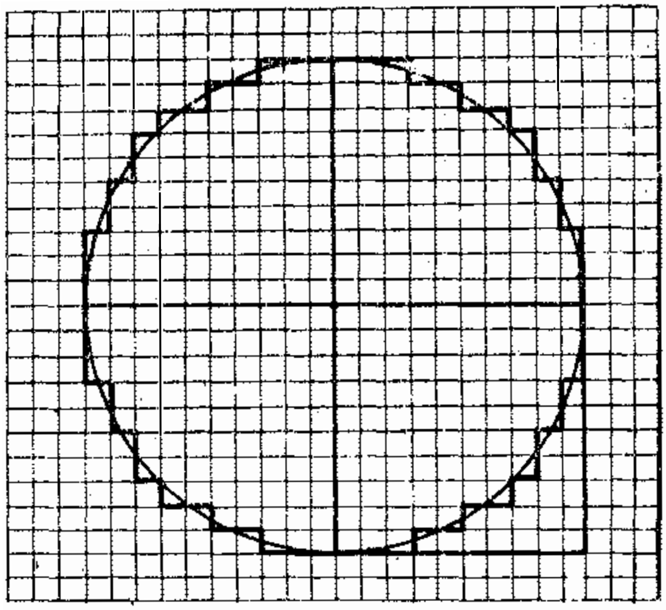
II способ. Учащиеся в своих тетрадях строят окружность данного радиуса R, например, R=5 см (черт. 1). С помощью циркуля-измерителя берется какой-нибудь отрезок, равный, например, 5 мм, и откладывается вначале на построенной окружности, а потом на диаметре. Разделив первое число, полученное при откладывании выбранного отрезка на окружности, на второе, полученное при измерении диаметра этим же отрезком, мы получаем число, приблизительно равное 3,14. В данном случае пятимиллиметровый отрезок в длине окружности поместился 61 раз, а на диаметре — 20 раз, поэтому $\frac{C}{2R} = 3{,}1$.



Черт. 1

При повторении эксперимента, принимая радиус равным, например, 3 см, 4 см, 6 см, учащиеся убеждаются, что значение отношения не изменяется при изменении длины радиуса. Надо разъяснить учащимся, что это значение отношения длины окружности к длине диаметра не является точным, так как длина окружности измеряется не по дуге, а по хордам, а также потому, что вообще всякое измерение не является абсолютно точным. Точные измерения дают значение отношения, которое обозначается через П, т. е. $\frac{C}{2R} = П$, отсюда $C = 2ПR$.

Площадь круга. Как уже было упомянуто выше, в учебнике Н. Н. Никитина формула площади круга выводится при помощи использования понятия предела. Кроме того, при этом выводе применяется понятие вписанного правильного многоугольника (этот термин не употребляется),



Черт. 2

которое изучается в VIII классе. Отказавшись от этого способа изложения, мы для разъяснения формулы площади круга применяли следующие экспериментальные способы:

I способ. Учащиеся в тетрадях в клетку строят окружность радиусом в 5 см и вычисляют площадь полученного круга таким способом: сосчитают целые клеточки, помещающиеся в построенном круге, и клеточки, бо́льшая часть которых помещается внутри круга (черт. 2). Число таких клеток в круге радиуса, равного 5 см, составляет 316. Учащиеся сами быстро замечают, что подсчет клеток можно вести так: сосчитать число клеток в одном квадранте круга и умножить его на 4 ($79 \cdot 4 = 316$).

После этого учащиеся подсчитают число квадратных сантиметров, помещающихся в данном круге: $316 : 4 = 79$ (см²). Итак, площадь круга приблизительно равна 79 см².

Ставилась задача: «Найти отношение площадей построенного круга и квадрата, сторона которого равна радиусу круга». Это отношение для нашей задачи равно $\frac{79}{25} = 3{,}16$.

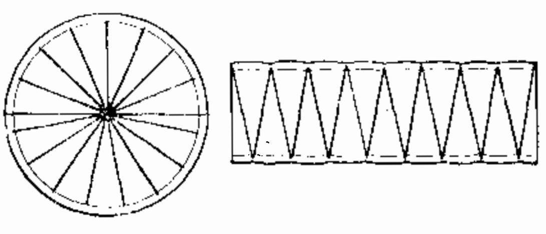
Решив задачу при $R=5$ см, нужно дать несколько задач, в которых длина радиуса равна каким-нибудь другим числам, чтобы учащиеся могли убедиться в том, что значение этого отношения не зависит от длины радиуса. Для экономии времени мы всех учащихся разделили на две группы: первая группа вычислила значение этого отношения для круга с радиусом 4 см, вторая — для круга с радиусом 3,5 см. Первая группа учащихся получила, что это отношение равно $\frac{50}{16} \approx 3{,}13$, вторая — $\frac{38}{12{,}25} \approx 3{,}17$. При исследовании полученных результатов ученики приходили к выводу, что значение отношения площади круга к площади квадрата, сторона которого равна радиусу данного круга, близкое к числу 3,14, т. е. близкое к известному учащимся числу П. Если обозначим площадь круга через S, его радиус через R, то получим $\frac{S}{R^2}=\Pi$. Отсюда $S=\Pi R^2$ или $S=\frac{1}{4}\Pi D^2$.

II способ. Для проведения этого эксперимента из листового металла толщиной в 1,2 см был изготовлен железный круг и квадрат, сторона которого равна радиусу круга. При взвешивании круга и квадрата было установлено, что круг тяжелее квадрата приблизительно в 3,14 раза. Отношение весов получено достаточно точным. Учащимся было указано, что если не обращать внимания на толщину пластинок (толщина круга и квадрата одинаковы), то полученные результаты обобщаются таким способом. При взвешивании получили, что

$$\frac{P_{\text{круга}}}{P_{\text{квадрата}}} \approx 3{,}14 \approx \Pi,$$

но $P_{\text{круга}}=\varrho S$, а $P_{\text{квадрата}}=\varrho R^2$, поэтому, сократив на ϱ, получим $\frac{S}{R^2}=\Pi$ или $S=\Pi R^2$.

III способ. Этот способ обычно раньше применялся в курсе арифметики V класса. Для демонстрации из картона изготовляется круг, радиус которого 12—16 см, и разрезается на 16 равных секторов. Один из этих секторов обычно разделяется еще на две равные части. Если к каждой полуокружности приклеить полоску полотна, то круг может быть преобразован в фигуру, напоминающую прямоугольник (черт. 3), стороны которого равны радиусу круга R и половине длины окружности, т. е. ΠR. Итак, $S=\Pi R\cdot R=\Pi R^2$.



Черт. 3

Этот способ является неточным потому, что фигура, полученная после преобразования круга, не является прямоугольником. Все-таки его можно применить в VI классе, так как он является наглядным и простым. Подобным способом можно пояснить формулу объема цилиндра.

Поверхность цилиндра. На этом этапе обучения надо, опираясь на интуицию учащихся, наглядно показать, что боковая поверхность цилиндра может быть так развернута на плоскости, что ее площадь при этом не изменится.

Для проведения разъяснения формулы поверхности цилиндра была изготовлена деревянная модель цилиндра, из чертежной бумаги были вырезаны прямоугольник, соответствующий боковой поверхности цилиндра, и два круга, соответствующие основаниям его, Рассматривая развертку, учащиеся убедились, что поверхность цилиндра состоит из прямоугольника, основание которого равно длине окружности основания цилиндра, а высота равна высоте его, и двух кругов — оснований цилиндра. Итак,

$$S_{бок}=2\Pi RH \text{ и } S_{пол}=2\Pi RH+2\Pi R^2=2\Pi R(H+R),$$

где R — радиус основания цилиндра, H — его высота.

Объем цилиндра. В своей практике для выяснения правильности формулы объема цилиндра мы пользовались такими экспериментальными способами:

I способ. На занятиях по труду в учебных мастерских учащимся было дано задание изготовить из жести кружку цилиндрической формы и коробку (без крышки), имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. При этом было указано, что кружка и коробка должны быть одинаковой высоты и иметь равновеликие основания, например, если радиус дна кружки R, то основанием коробки может быть прямоугольник со сторонами ΠR и R или $\frac{1}{2}\Pi R$ и 2R. Некоторые учащиеся вместо цилиндрической кружки взяли пустую консервную банку и изготовили к ней соответствующую коробку из картона.

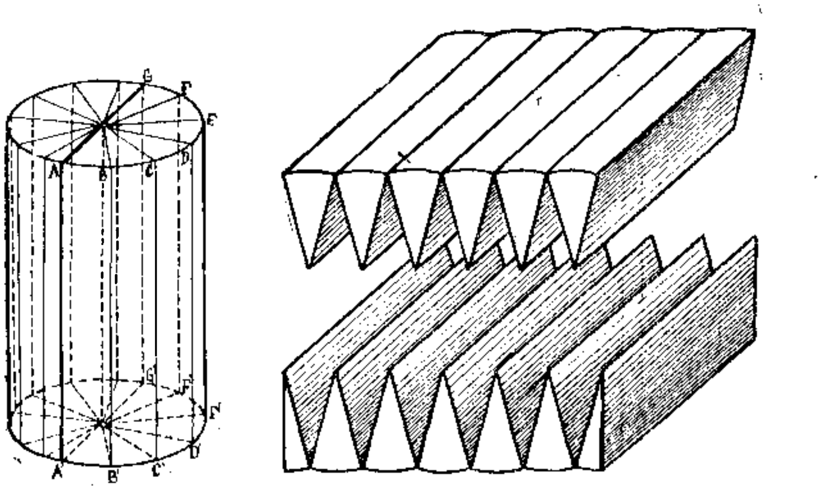
Перед проведением эксперимента, разъясняющего формулу объема цилиндра, учащимся было дано задание измерить площади оснований цилиндрической кружки и прямоугольной коробки и доказать, что эти площади равны. Работу по измерению провели два ученика при активном наблюдении остальных. После этого пересыпанием сухого песка было установлено, что коробка и кружка имеют одинаковые объемы. Опыт был повторен с другой кружкой и соответствующей ей коробкой. При обобщении результатов проведенного эксперимента был сделан следующий вывод: объем цилиндра вычисляется по той же формуле, которую применяли для измерения объема прямоугольного параллелепипеда, т. е. по формуле $V=S\cdot H$, где S — площадь основания прямоугольного параллелепипеда, а H — высота его. Но основанием цилиндра является круг, площадь которого равна ΠR^2 (R — радиус основания цилиндра). Так как $S=\Pi R^2$, а высота прямоугольного параллелепипеда равна высоте цилиндра, то объем цилиндра $V=\Pi R^2H$.

II способ. Для объяснения формулы объема цилиндра этим способом мы изготовили наглядное пособие, общий вид которого показан на чертеже 4. Опишем самый простой, на наш взгляд, способ изготовления этого наглядного пособия.

Вначале из толстого картона изготовляется цилиндр, размеры которого могут быть примерно такими: R=12,5 см, H=10 см. Модель оклеивается цветной бумагой и хорошо высушивается. Цилиндр по диаметрам AG и A′G′ и по образующим AA′ и GG′ (черт. 4) острым ножом делится на две равные части, основания цилиндра также разрезаются по радиусам OA, OB, OC и т. д. (при этом для лучшего совпадения модели надо вырезать полоски шириной в 1—2 мм), а боковая поверхность с внутренней стороны надрезается по образующим AA′, BB′, CC′ и т. д. до половины толщины картона. После этого берется прямоугольный лист чертежной бумаги, ширина которого на 2 см больше высоты цилиндра (для клапанов приклеивания), а длина равна 12R; этот лист перегибается по длине на 12 равных частей, каждый раз делая сгиб в другую сторону, и при помощи клапанов приклеивается к картонным зубцам. Аналогичная работа проделывается с другой половиной цилиндра.

По окончании работы секторы основания оклеиваются бумагой. Для хранения модели можно изготовить цилиндрический футляр.

При помощи этого наглядного пособия можно продемонстрировать, как цилиндр преобразуется в тело, мало отличающееся от прямоуголь-



Черт. 4

ного параллелепипеда, площадь основания которого равна ΠR^2, а высота — высоте цилиндра H. Формула объема прямоугольного параллелепипеда уже известна учащимся. Поэтому $V = \Pi R^2 H$.

Поверхность и объем призмы. Этот материал включен в курс геометрии VIII класса. Его можно изложить по учебнику Н. Н. Никитина, особое внимание уделяя при этом моделированию призм и проведению практических работ.

Поверхность правильной пирамиды. По программе в VIII классе изучается только правильная пирамида. Это объясняется тем, что изучение неправильной пирамиды сильно усложнило бы этот вопрос и потребовало бы гораздо больше времени. В учебнике Н. Н. Никитина формула боковой поверхности правильной пирамиды не выводится, а только указывается, что боковую поверхность правильной пирамиды можно найти как сумму площадей боковых граней. Мы считаем, что для учащихся VIII класса можно вывести эту формулу таким же способом, как она выводится в стабильном учебнике Киселева, но при решении задач не надо требовать обязательного применения его.

Объем пирамиды.

I способ. Для проведения эксперимента заранее надо изготовить из картона две—три пары моделей прямой призмы (без одного основания) и пирамиды (без основания). Основания и высоты этих геометрических тел должны быть равными. Пересыпанием сухого песка или переливанием воды из пирамиды в призму учащиеся убеждаются, что объем пирамиды в три раза меньше объема призмы, имеющей такое же самое основание и высоту, как и пирамида. Так как объем призмы вычисляется по формуле $V = BH$, где B — площадь основания, а H — высота ее, то объем пирамиды $V = \frac{1}{3} BH$.

II способ. Берутся деревянные модели пирамиды и прямой призмы, имеющие равные основания и высоты, и взвешиванием устанавливается, что модель призмы в три раза тяжелее модели пирамиды. Так как обе модели изготовлены из того же материала, то $\frac{V_{\text{пирамиды}}}{V_{\text{призмы}}} = \frac{1}{3}$, отсюда

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} V_{\text{призмы}} = \frac{1}{3} BH.$$

Несмотря на то, что программа нашей восьмилетней школы не выделяет времени для ознакомления учащихся с формулами вычисления поверхностей и объемов конуса и шара, мы ниже приводим эксперименты, устанавливающие справедливость этих формул. На наш взгляд, эти вопросы должны быть рассмотрены в восьмилетней школе.

Поверхность конуса. Формула боковой поверхности конуса в учебнике Н. Н. Никитина дается без доказательства и только потом разъясняется при помощи теории пределов. При этом допускается, что боковая поверхность конуса развернута в плоскую фигуру — круговой сектор. Возникает вопрос: с какой целью применяется теория пределов для вычисления площади кругового сектора, если учащимся уже известно, как вычисляется площадь такой фигуры по формуле, выведенной в курсе геометрии VII класса? Ясно, что если бы мы хотели вычислить боковую поверхность конуса, не развернув ее в круговой сектор, как это делается в старших классах, то применение теории пределов было бы необходимо. В том же случае, когда коническая поверхность развернута в плоскую фигуру, применение теории пределов вообще не нужно.

Из всего сказанного следует, что для выведения формулы боковой поверхности конуса в VIII классе, как и в случае цилиндра, надо допустить, что коническую поверхность можно развернуть на плоскую фигуру — круговой сектор, не изменяя при этом площади поверхности ее, и вычислить площадь кругового сектора по формуле. В нашей восьмилетней школе по программам не выводится формула площади сектора. Поэтому, перед тем как приступить к объяснению формулы поверхности конуса, надо вывести формулу площади сектора.

Для ознакомления учащихся с формулой поверхности конуса демонстрируется модель конуса и развертка его боковой поверхности, сделанная из чертежной бумаги. Сворачивая конус в его бумажную развертку, вынимая модель конуса из развертки и выпрямляя коническую поверхность в плоскость, учащиеся убеждаются в том, что боковая поверхность конуса может быть развернута в круговой сектор. Сами учащиеся устанавливают, что радиус этого сектора равен образующей конуса l, а длина дуги его равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\Pi R$ (R — радиус основания конуса). Применив формулу площади кругового сектора, получаем:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{2\Pi R \cdot l}{2} = \Pi R l.$$

Объем конуса. Формулу объема конуса можно пояснить такими двумя экспериментальными способами.

I способ. Для проверки формулы объема конуса данным способом надо изготовить из жести цилиндрическую кружку и конус, при этом они оба должны иметь равные основания и высоты. Можно поступить еще проще: взять пустую консервную банку, точно измерить диаметр основания и высоту ее и по этим измерениям изготовить жестяную модель конуса. Все это можно сделать на уроках труда в школьных мастерских.

Пересыпанием сухого песка или переливанием воды учащиеся убеждаются, что объем конуса в три раза меньше объема цилиндра, если основания и высоты этих тел равны. Так как объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, то объем конуса будет равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V=\frac{1}{3}\ BH \text{ или } V=\frac{1}{3}\ \Pi R^2H.$$

II способ. Из одного и того же материала (дерева, железа, **гипса**) *изготовляются конус* и цилиндр с равными основаниями и высотами. При помощи точных весов взвешиваем эти оба тела и убеждаемся в том, что

$$\frac{P_{\text{кон.}}}{P_{\text{цил.}}}=\frac{1}{3}.$$

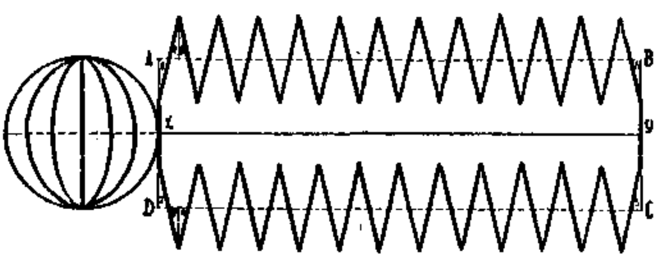
Но $P_{\text{кон.}}=\varrho\cdot V_{\text{кон.}}$ и $P_{\text{цил.}}=\varrho\cdot V_{\text{цил.}}$, где ϱ — удельный вес того материала, из которого изготовлены оба тела. Итак,

$$\frac{\rho\cdot V_{\text{кон.}}}{\rho\cdot V_{\text{цил.}}}=\frac{1}{3} \text{ или } \frac{V_{\text{кон.}}}{V_{\text{цил.}}}=\frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$V_{\text{кон.}}=\frac{1}{3}\ V_{\text{цил.}}=\frac{1}{3}\ \Pi R^2H.$$

Поверхность шара. Поверхности всех тел, изучаемых в восьмилетней школе, можно развернуть на плоскость и вычислить ее площадь как



Черт. 5

площадь плоской фигуры. Этого нельзя сделать с шаровой поверхностью: никакая, даже очень малая часть шаровой поверхности не может быть выпрямлена в плоскую фигуру.

I способ. Для пояснения справедливости формулы поверхности шара можно использовать способ приближенного развертывания шаровой поверхности на плоскость. Такими приближенными способами пользуются географы при составлении географических карт, астрономы при составлении карт звездного неба, кровельщики при покрытии полусферической крыши жестью и т. д.

Пусть радиус шара R. Разделим его поверхность на 12 (еще лучше на 24) равных частей по меридианам. Если «выпрямить» эти части шаровой поверхности, то получим приближенную развертку шаровой поверхности, показанную на чертеже 5. Нетрудно заметить, что такую развертку можно преобразовать в прямоугольник.

II способ. Берутся деревянные модели пирамиды и прямой призмы, имеющие равные основания и высоты, и взвешиванием устанавливается, что модель призмы в три раза тяжелее модели пирамиды. Так как обе модели изготовлены из того же материала, то $\frac{V_{\text{пирамиды}}}{V_{\text{призмы}}} = \frac{1}{3}$, отсюда

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} V_{\text{призмы}} = \frac{1}{3} BH.$$

Несмотря на то, что программа нашей восьмилетней школы не выделяет времени для ознакомления учащихся с формулами вычисления поверхностей и объемов конуса и шара, мы ниже приводим эксперименты, устанавливающие справедливость этих формул. На наш взгляд, эти вопросы должны быть рассмотрены в восьмилетней школе.

Поверхность конуса. Формула боковой поверхности конуса в учебнике Н. Н. Никитина дается без доказательства и только потом разъясняется при помощи теории пределов. При этом допускается, что боковая поверхность конуса развернута в плоскую фигуру — круговой сектор. Возникает вопрос: с какой целью применяется теория пределов для вычисления площади кругового сектора, если учащимся уже известно, как вычисляется площадь такой фигуры по формуле, выведенной в курсе геометрии VII класса? Ясно, что если бы мы хотели вычислить боковую поверхность конуса, не развернув ее в круговой сектор, как это делается в старших классах, то применение теории пределов было бы необходимо. В том же случае, когда коническая поверхность развернута в плоскую фигуру, применение теории пределов вообще не нужно.

Из всего сказанного следует, что для выведения формулы боковой поверхности конуса в VIII классе, как и в случае цилиндра, надо допустить, что коническую поверхность можно развернуть на плоскую фигуру — круговой сектор, не изменяя при этом площади поверхности ее, и вычислить площадь кругового сектора по формуле. В нашей восьмилетней школе по программам не выводится формула площади сектора. Поэтому, перед тем как приступить к объяснению формулы поверхности конуса, надо вывести формулу площади сектора.

Для ознакомления учащихся с формулой поверхности конуса демонстрируется модель конуса и развертка его боковой поверхности, сделанная из чертежной бумаги. Сворачивая конус в его бумажную развертку, вынимая модель конуса из развертки и выпрямляя коническую поверхность в плоскость, учащиеся убеждаются в том, что боковая поверхность конуса может быть развернута в круговой сектор. Сами учащиеся устанавливают, что радиус этого сектора равен образующей конуса l, а длина дуги его равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\Pi R$ (R — радиус основания конуса). Применив формулу площади кругового сектора, получаем:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{2\Pi R \cdot l}{2} = \Pi R l.$$

Объем конуса. Формулу объема конуса можно пояснить такими двумя экспериментальными способами.

I способ. Для проверки формулы объема конуса данным способом надо изготовить из жести цилиндрическую кружку и конус, при этом они оба должны иметь равные основания и высоты. Можно поступить еще проще: взять пустую консервную банку, точно измерить диаметр основания и высоту ее и по этим измерениям изготовить жестяную модель конуса. Все это можно сделать на уроках труда в *школьных мастерских.*

Действительно, если на расстоянии радиуса R по обе стороны от оси XY провести параллельные ей прямые AB и CD, то эти прямые отсекут от развертки поверхности шара ряд равных равнобедренных треугольников. Если теперь эти треугольники вложить в промежутки, полученные на развертке после проведения прямых AB и CD, то получим прямоугольник ABCD, основание которого равно длине окружности большого круга шара, т. е. $2\Pi R$, а высота равна диаметру шара $2R$. Итак, поверхность шара равна площади прямоугольника ABCD, т. е. $S_{ш} = 2\Pi R \cdot 2R = 4\Pi R^2$.

II способ. (Описан в книге «Наглядная геометрия» А. М. Астряба, М.—Петр., 1923). Берется деревянная модель полушара и достаточно толстая и крепко свитая веревка. При помощи булавки прикрепляется один конец веревки в полюсе полушара, и шаровая поверхность его туго обвертывается веревкой. Чтобы при этом обмотки не соскальзывали, каждый виток веревки прикрепляется булавкой. Таким же способом обвертывается и площадь большого круга. Веревка разматывается и сравниваются длины веревок, обвернувших поверхность полушара и площадь большого круга. В результате сравнения оказывается, что отношение длин веревок приблизительно равно 2. Итак, поверхность шара в 4 раза больше, чем площадь большого круга его, т. е. $S_{ш} = 4\Pi R^2$.

III способ. Берется пустотелый металлический или стеклянный шар и из соответствующего материала изготовляется большой круг этого шара. Толщина стенок шара должна быть равной толщине изготовленного круга. При взвешивании устанавливается, что отношение веса шара к весу большого круга его приблизительно равно 4. Значит, площадь шара равна учетверенной площади большого круга его.

Примечание. Перед демонстрацией эксперимента в классе учитель должен его проделать сам, так как иногда результаты взвешивания бывают недостаточно точными.

Объем шара. Для разъяснения формулы объема шара мы предлагаем применить один из ниже описанных способов.

I способ. Берутся пустотелые полушар и конус. При этом большой круг шара должен быть равным основанию конуса, а высота конуса — радиусу шара. Пересыпанием сухого песка или переливанием воды из конуса в полушар убеждаемся, что объем этого конуса в два раза меньше объема полушара. Так как объем конуса в данном случае равен $\frac{1}{3}\Pi R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\Pi R^3$, то объем полушара будет равен $\frac{2}{3}\Pi R^3$, а объем шара — $V = \frac{4}{3}\Pi R^3$.

II способ. Берем пустотелый полушар радиуса R и изготовляем из жести цилиндр и конус, радиусы оснований и высоты которых равны радиусу полушара R. Если в цилиндрическую кружку влить воду из наполненных водой конуса и полушара, то она окажется полной. Итак,

$$V_{кон.} + V_{полуш.} = V_{цил.} \qquad (1)$$

Отсюда $V_{полуш.} = V_{цил.} - V_{кон.} = \Pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\Pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\Pi R^3$, а полный объем шара $V = \frac{4}{3}\Pi R^3$.

III способ. Применяется так называемый набор тел Архимеда. Такое название носят цилиндр, конус и шар в том случае, когда диаметры оснований и высоты первых двух равны диаметру шара. Эти тела имеют то свойство, что

$$V_{цил.} = V_{кон.} + V_{ш}. \qquad (2)$$

Используя эту зависимость между объемами данных тел, мы к шару, имеющемуся в школьном кабинете математики, изготовили из жести цилиндрическую кружку и конус без основания и объяснение формулы объема шара провели следующим образом: в цилиндрическую кружку вложили шар и ее наполнили водой, из кружки осторожно вынули шар и воду вылили в коническую лейку. Убедившись в том, что $V_{цил.} - V_{ш.} = V_{кон.}$, имеем, что

$$V_{ш} = V_{цил.} - V_{кон.} = \Pi R^2 \cdot 2R - \frac{1}{3} \Pi R^2 \cdot 2R = 2\Pi R^3 - \frac{2}{3} \Pi R^3 = \frac{4}{3} \Pi R^3.$$

IV способ. Формула (1) или (2) устанавливается взвешиванием деревянных или гипсовых моделей цилиндра, шара и конуса, а из них выводится формула **объема** шара.

При объяснении формул поверхностей и объемов геометрических тел экспериментальным способом надо предупредить учащихся, что проведенные эксперименты не являются точным доказательством этих формул и что точные доказательства будут даны в старших классах средней школы.

Экспериментальный способ проверки формул поверхностей и объемов геометрических тел является вполне приемлемым в восьмилетней школе, так как проведение экспериментов убеждает учащихся в справедливости этих формул и не требует много времени. Наглядность экспериментов дает возможность учащимся лучше запомнить формулы, осмыслить их.

Ленинградский Государственный
Педагогический институт им. А. И. Герцена

Поступило
в январе 1963 г.

APIE STEREOMETRINĖS MEDŽIAGOS DĖSTYMĄ AŠTUONMETĖJE MOKYKLOJE

V. DRĖGŪNAS

Reziumė

Pagal naująsias matematikos programas kai kurie stereometrijos kurso klausimai (paprasčiausių geometrinių kūnų paviršių ir tūrių apskaičiavimas, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtys) nagrinėjami jau aštuonmetėje mokykloje. Stereometrinės medžiagos dėstymas aštuonmetėje mokykloje turi didelę reikšmę mokinių politechniniam lavinimui ir todėl šios medžiagos nagrinėjimui turi būti skiriamas reikiamas dėmesys.

Tarp RTFSR ir mūsų respublikos programų šiuo klausimu yra esminių skirtumų. RTFSR aštuonmetėse mokyklose stereometrijos nagrinėjimas sukoncentruotas VII—VIII klasių geometrijos kurse, o mūsų respublikos mokyklose — V—VI klasių aritmetikos kurse ir VIII klasės geometrijos kurse. Mūsų mokykloje šių klausimų nagrinėjimui skiriama žymiai mažiau laiko, negu RTFSR mokyklose, kai kurie klausimai visai neįtraukiami į programas, pavyzdžiui, kūgio ir rutulio nagrinėjimas.

Dėl esančių skirtumų stereometrijos dėstyme mūsų respublikos matematikos mokytojai negali pilnai pasinaudoti savo darbe metodine literatūra, parašyta šiuo klausimu rusų kalba. Mūsų metodinėje ir pedagoginėje spaudoje šis klausimas visiškai nenagrinėtas. Kadangi stereometrija aštuonmetėje mokykloje turi būti dėstoma induktyviniu metodu, kuris matematikos mokytojams yra neįprastas, todėl mokytojui, dėstančiam šią

medžiagą, gali kilti neaiškumų. Šių klausimų dėstymą apsunkina ir tai, kad mokiniams tenka naudotis išverstu iš rusų kalbos N. Nikitino geometrijos vadovėliu, kuris nėra pritaikytas mūsų respublikos mokykloms.

Šio straipsnio pagrindinis tikslas yra supažindinti respublikos matematikos mokytojus su stereometrijos dėstymo aštuonmetėje mokykloje pagrindiniais principais, išnagrinėti geometrinių kūnų paviršių ir tūrių formulių įrodymo tinkamiausius būdus šiame mokymo etape. Remdamiesi savo patyrimu, įgytu, dėstant stereometriją kai kuriose Leningrado ir mūsų respublikos mokyklose, mes priėjome išvadą, kad tenka atsisakyti kai kurių Nikitino vadovėlyje išnagrinėtų erdvinių kūnų paviršių ir tūrių formulių „įrodymų", kuriuose panaudojama ribų teorija, nes ji aštuonmetėje mokykloje dėl savo sudėtingumo nenagrinėjama. Vietoj šių įrodymų siūlome eksperimentinį formulių patikrinimo būdą, pagrįstą vaizdumo ir įtikinimo metodais. Eksperimentinis būdas nereikalauja daug laiko, įtikina mokinius formulių teisingumu, įgalina juos tvirčiau ir sąmoningiau įsiminti stereometrijos klausimus. Straipsnyje aprašomi įvairūs formulių patikrinimo būdai, kuriuos naudojome savo praktikoje.