LIETUVOS TSR AUKŠTŲJŲ MOKYKLŲ MOKSLO DARBAI.
PEDAGOGIKA IR PSICHOLOGIJA III, 1962

KAI KURIE BRIAUNAINIŲ TŪRIO UŽDAVINIAI

M. GOTLERAS

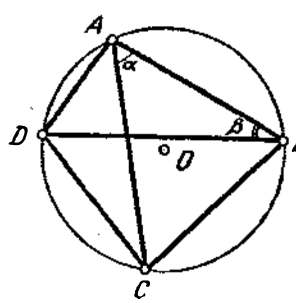
Kai kurie briaunainių tūrio nustatymo uždaviniai, gana nesudėtingi pagal savo formulavimą, paprastai sprendžiami, panaudojant sferinės trigonometrijos formules ir todėl vengiami mokyklinėje praktikoje. Toks yra, pavyzdžiui, uždavinys, kur reikia rasti gretasienio tūrį, žinant tris jo briaunas, išeinančias iš vienos viršūnės, ir plokščiuosius kampus prie šios viršūnės. Šis uždavinys paprastai sprendžiamas[1], pasinaudojus sferinės trigonometrijos kosinusų teorema:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

nustatančia ryšį tarp trisienio kampo plokščiųjų kampų α, β, γ ir dvisienio kampo A, esančio prieš plokščiąjį kampą α.

Išvesime dabar paprastą pareinamybę, kurią sėkmingai galime panaudoti vietoj sferinės trigonometrijos kosinusų teoremos, sprendžiant panašius uždavinius. Reikalas liečia pareinamybę tarp įbrėžtinio keturkampio įstrižainių, kraštinių ir prieš jas esančių įbrėžtinių kampų.

T e o r e m a. *Įbrėžtinio keturkampio įstrižainės yra proporcingos prieš jas esančių keturkampio kampų sinusams; to keturkampio kraštinės proporcingos į jas besiremiančių įbrėžtinių kampų sinusams.*


1 brėž.

Tegul keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kurio spindulys R (žr. brėž. 1). Iš įbrėžtinių trikampių ABC ir ABD, pagal sinusų teoremą, gauname (pažymėję $\angle DAB = A$, $\angle ABC = B$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$):

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \text{ ir } \frac{BD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin\beta} = 2R.$$

Tokiu būdu

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BD}{\sin A} \text{ ir } \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\beta}.$$

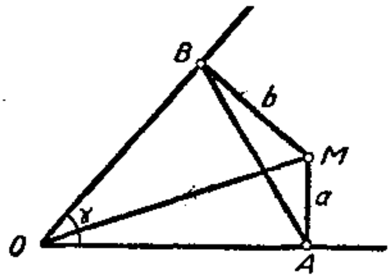
I š v a d o s 1) Jei $A = 90°$, tai $BD = \frac{AC}{\sin B}$, t. y.

[1] С. И. Новосёлов, Специальный курс тригонометрии, 1959, р. 473.

įbrėžtinio keturkampio įstrižainė, esanti prieš statųjį kampą, lygi antrajai įstrižainei, padalytai iš prieš ją esančio kampo sinuso.

2) Jei $\alpha=90°$, tai $BC=\frac{AD}{\sin\beta}$, t. y.

įbrėžtinio keturkampio kraštinė, į kurią remiasi statusis įbrėžtinis kampas, lygi kuriai nors kitai keturkampio kraštinei, padalytai iš į ją besiremiančio įbrėžtinio kampo sinuso.



2 brėž.

P a s t a b a. Įrodytoji teorema gali būti taikoma ir nepaprastam keturkampiui, pvz. keturkampiui *ACDB:* jame *AD* ir *BC* yra įstrižainės, o *AC* ir *BD* — kraštinės.

Parodysime įrodytų pareinamybių panaudojimą, sprendžiant kai kuriuos geometrinius uždavinius.

1 u ž d a v i n y s. Taškas *(M),* esąs kampo γ viduje, yra nutolęs nuo kampo kraštinių atstumais a ir b. Rasti šio taško atstumą iki kampo viršūnės *(O)*.

S p r e n d i m a s. Tegul $MA=a$, $MB=b$ (brėž. 2). Keturkampis *AOBM* — įbrėžtinis (nes $A+B=180°$), todėl pagal įrodytą teoremą

$$OM=\frac{AB}{\sin\gamma}.$$

Iš trikampio *ABM*, kur $\angle AMB=180°-\gamma$, randame

$$AB=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}.$$

Vadinasi,

$$OM=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

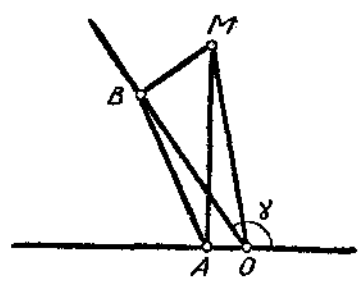
P a s t a b o s. 1. Jei vieno statmens pagrindas, pvz., A, yra kampo kraštinės tęsinyje (žr. brėž. 3), tai, pagal pareinamybę tarp įbrėžtinio keturkampio *(ABMO)* kraštinių, gauname

$$OM=\frac{AB}{\sin(180°-\gamma)}=\frac{AB}{\sin\gamma}.$$

Kadangi ir šiuo atveju $\angle AMB=180°-\gamma$, tai atkarpoms *AB* ir *OM* gauname atitinkamai tas pačias išraiškas.

2. Jei taškas *M* yra gretimame kampe, t. y. kampe, lygiame $180°-\gamma$, tai

$$OM=\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

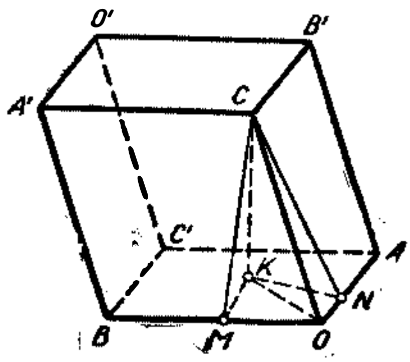


3 brėž.

3. Įrodytos formulės tinka ir tuo atveju, kai taškas *M* yra vienoje kampo kraštinėje (ar jos tęsinyje). Šiuo atveju vienas iš duotųjų nuotolių, pvz., b, lygus nuliui. Tiek iš formulių, tiek ir betarpiškai iš brėžinio, gauname:

$$OM=\frac{a}{\sin\gamma}.$$

2 uždavinys. Apskaičiuoti gretasienio tūrį, jei trys gretasienio briaunos, išeinančios iš vienos viršūnės, atitinkamai lygios a, b, c, o plokštieji kampai prie šios viršūnės α, β, γ (be to, $|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta$).



4 brėž.

Sprendimas. Tegul $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$; $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $AOB=\gamma$ (brėž. 4).

Iš viršūnės C brėžiame:

$$CM\perp OB,\ CN\perp OA,\ CK\perp \text{pl. } AOBC'.$$

Iš trijų statmenų teoremos išplaukia:

$$KM\perp OB,\ KN\perp OA.$$

Gauname: $OM=c\cos\alpha$, $ON=c\cos\beta$. Todėl

$$OK=\frac{MN}{\sin\gamma}=\frac{c\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

Iš trikampio COK randame gretasienio aukštinę:

$$CK=\frac{c\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

Kadangi pagrindo plotas $S=ab\sin\gamma$, tai tūris

$$V=abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Pastaba. Mūsų brėžinys ir sprendimas atitinka tą atvejį, kai $\alpha<90°$, $\beta<90°$. Kai $\alpha>90°$, $\beta>90°$, vietoj viršūnės O galima imti viršūnę C', prie kurios plokštieji kampai yra $180°-\alpha$, $180°-\beta$ ir γ. Kai $\alpha<90°$, $\beta>90°$, vietoj viršūnės O imama viršūnė A, prie kurios plokštieji kampai yra α, $180°-\beta$, $180°-\gamma$. Abiem atvejais tūrio formulė lieka ta pati (nes $\cos(180°-x)=-\cos x$).

Lengva įsitikinti, kad gautoji formulė tinka ir tuo atveju, kai tarp plokščiųjų kampų yra ir statieji.

3 uždavinys. *Gretasienio sienos yra lygūs rombai, kurių kiekvieno kraštinė yra a, o smailusis kampas — α. Rasti to gretasienio tūrį.*

Sprendimas. Uždavinio sąlygas tenkina du gretasieniai.

1. Tegul plokštieji kampai prie vienos gretasienio viršūnių yra α, α, α. Tokie pat kampai yra prie priešingos viršūnės. Prie likusių viršūnių plokštieji kampai yra α, $180°-\alpha$, $180°-\alpha$. Tokia konfigūracija galima visuomet, bet kuriam kampo α didumui esant.

Pagal 2 uždavinį gauname

$$V=a^3\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}=a^3\sqrt{\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

2. Prie dviejų gretasienio viršūnių plokštieji kampai yra $180°-\alpha$, $180°-\alpha$, $180°-\alpha$, o prie likusių viršūnių α, α, $180°-\alpha$. Tokia konfigūracija galima tik, kai $180°-\alpha<120°$, t. y. $\alpha>60°$. Šiuo atveju turime

$$V=a^3\sqrt{1-3\cos^2\alpha-2\cos^3\alpha}=a^3\sqrt{\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

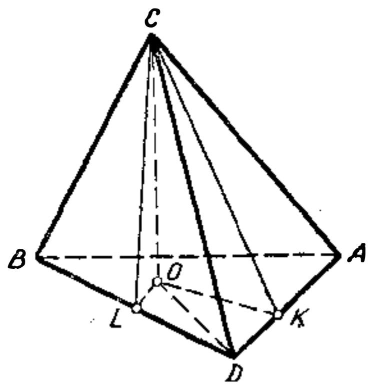
Atsakymas. Kai $\alpha \leqslant 60^\circ$ $(180^\circ - \alpha \geqslant 120^\circ)$, uždavinio sąlygas tenkina vienas gretasienis, kurio tūris

$$V = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Kai $\alpha > 60^\circ$, uždavinio sąlygas tenkina du gretasieniai, kurių tūriai atitinkamai lygūs:

$$V_1 = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}, \qquad V_2 = 2a^3 \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

4 uždavinys. *Trys trikampės piramidės briaunos, išeinančios iš vienos viršūnės, lygios a, b, c. Dvisieniai kampai prie briaunų a ir b atitinkamai lygūs α ir β, o kampas tarp šių briaunų γ. Rasti piramidės tūrį.*



5 brėž.

Sprendimas. Tegul $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$; $\angle ADB = \gamma$ (brėž. 5). Brėžiame piramidės aukštinę CO ir šoninių sienų aukštines CK ir CL $(CK \perp DA,\ CL \perp DB)$. Tuomet

$$OK \perp DA,\ OL \perp DB \text{ ir } \angle CKO = \alpha,\ \angle CLO = \beta.$$

Piramidės pagrindo plotas $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Reikia surasti piramidės aukštinę CO. Pažymėję $CO = x$, gauname

$$OK = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\ OL = x\,\mathrm{ctg}\,\beta,\ OD^2 = \frac{LK^2}{\sin^2\gamma} = x^2\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

Iš $\triangle$ COD pagal Pitagoro teoremą gauname

$$x = \frac{c\sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma + \mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\cos\gamma}}.$$

Tokiu būdu piramidės tūris

$$V = \frac{abc\sin^2\gamma}{6\sqrt{\sin^2\gamma + \mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\beta + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\cos\gamma}}.$$

5 uždavinys. *Apskaičiuoti trikampės piramidės tūrį, žinant šešių jos briaunų ilgius.*

Sprendimas. Tegul $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $CA = b_1$, $AB = c_1$, $BC = a_1$ (brėž. 5). Pažymėję $\angle BDC = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, $\angle ADB = \gamma$, gausime (žr. uždavinį 2) piramidės tūriui išraišką:

$$V = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Bet

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b_1^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2ab}.$$

Įstatę šias reikšmes į tūrio formulę, gauname

$$V=\frac{1}{12}\Big[4a^2b^2c^2-a^2\left(b^2+c^2-a_1^2\right)^2-b^2\left(c^2+a^2-b_1^2\right)^2-$$
$$-c^2\left(a^2+b^2-c_1^2\right)^2+\left(b^2+c^2-a_1^2\right)\left(c^2+a^2-b_1^2\right)\left(a^2+b^2-c_1^2\right)\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

VVPI Elementarinės matematikos
ir aukštosios algebros katedra

Įteikta
1962 m. kovo mėn.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НА ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

М. ГОТЛЕР

Резюме

Некоторые задачи на определение объемов многогранников, довольно простые по своей формулировке, решаются обычно с применением формул сферической тригонометрии и поэтому не применяются в школьной практике. Такова, например, задача на определение объема параллелепипеда по длине трех его ребер, выходящих из одной вершины, и величине плоских углов при этой вершине.

В статье выводится простое соотношение между диагоналями вписанного четырехугольника («диагонали вписанного четырехугольника относятся как синусы противоположных углов четырехугольника») и показывается применение этого соотношения для определения объемов многогранников.