НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ЛИТОВСКОЙ ССР.
ПЕДАГОГИКА И ПСИХОЛОГИЯ I, 1962

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ К ЗАДАЧЕ О «МЕРТВОЙ ПЕТЛЕ»

Л. КУЛЬВЕЦАС

В элементарной механике широко известны задачи о «мертвой петле» — о движении тяжелой точки или однородного шарика по окружности в вертикальной плоскости. Задачи этого типа решаются как в средней, так и в высшей школе при прохождении общего курса физики и теоретической механики. Однако часто в учебниках и задачниках по механике рассмотрение этих задач и даже сама их формулировка сопряжены с бо́льшими или меньшими недостатками математического или логического характера.

Единственная работа, которая специально посвящена изучению задач о «мертвой петле»,— это статья М. А. Грабовского[1]. Однако и в ней, несмотря на некоторые интересные соображения ее автора (в частности, заслуживают внимания предложенные им опыты с системами нескольких шариков), имеется ряд ошибочных рассуждений, приводящих к неправильным результатам и рекомендациям. Поскольку недостатки указанной статьи являются в известной мере типичными, возникает необходимость глубже разобрать этот вопрос.

1. Коснемся сперва самой постановки задачи.

Мы уже настолько привыкли к ставшей классической формулировке ее, например: «С какой высоты надо пустить без толчка шарик по желобу, делающему круговую петлю радиуса r, чтобы шарик не выпадал из петли в ее верхней точке К?»[2] или «Ведерко с водой вращают в вертикальной плоскости на верёвке длиной 0,5 *м*. С какой наименьшей скоростью нужно его вращать, чтобы при прохождении ведерка через высшую точку дном вверх вода из него не выливалась?»[3], что не замечаем здесь никакой ошибки, делающей задачу неопределенной. Не замечаем мы этой ошибки подобно тому, как не замечал ее еще Аристотель, когда писал, что «вода не выливается из сосуда, который вращается, не выливается даже тогда, когда сосуд перевернут дном вверх»[4].

Правильный ответ на вышеприведенные и подобные им задачи звучит очень парадоксально: для того, чтобы шарик не выпадал из петли в ее верхней точке, его можно пустить по желобу с *любой* высоты; аналогично, чтобы вода не выливалась из ведерка при прохождении его через высшую точку, ведерко можно вращать с *любой* скоростью и т. п. Дело в том,

---

[1] М. А. Грабовский, Физика в школе, 1959, № 3, р. 93.
[2] Н. П. Третьяков, Курс физики, М., 1952, р. 242.
[3] Сборник вопросов и задач по физике, под ред. П. А. Знаменского, М., 1958, р. 60.
[4] Я. И. Перельман, Занимательная физика, кн. 2, М.—Л., 1949, р. 54.

что — при любой скорости — в верхней точке петлеобразной траектории ни шарик не выпадет из желоба, ни вода не выльется из ведра, ни летчик не оторвется от сидения и т. п. Выражая эту мысль точно, можно сказать, что тяжелая материальная точка, движущаяся по окружности в вертикальной плоскости, никогда не отрывается от нее *в верхней точке* в случае односторонней связи, не дозволяющей перемещений во внешнюю сторону окружности (нить, желоб, ведро, сиденье и т. д.).

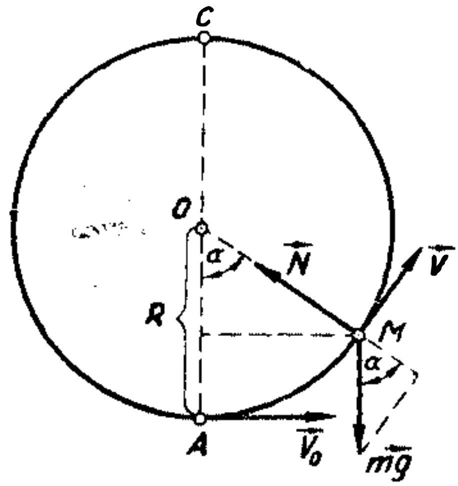

Рис. 1

Этот с первого взгляда странный факт очень легко доказать. Для этой цели определим величину N реакции связи.

При обозначениях рис. 1 имеем:

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg\cos\alpha. \qquad (1)$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя mv^2 из (2) в (1), получаем:

$$N = mg\left(\frac{v_0^2}{gR} - 2 + 3\cos\alpha\right). \qquad (3)$$

При изменении α от 0° до 180° реакция N монотонно убывает от значения $N_A = mg\left(\frac{v_0^2}{gR}+1\right)$ до значения $N_C = mg\left(\frac{v_0^2}{gR}-5\right)$, достигая в точке C минимума. N обращается в нуль при $\alpha=\alpha_1$, определяемом из уравнения

$$\frac{v_0^2}{gR} - 2 + 3\cos\alpha_1 = 0.$$

Отсюда

$$\cos\alpha_1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right). \qquad (4)$$

Если $2gR \leqslant v_0^2 \leqslant 5gR$, то $90° \leqslant \alpha_1 \leqslant 180°$; если $0 < v_0^2 < 2gR$, то $\arccos\frac{2}{3} < \alpha_1 < 90°$.

Скорость v_1 точки M в положении, где реакция N обращается в нуль, равна

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gR}{3}}, \qquad (5)$$

как это следует из (2) и (4).

Отрыв точки M от окружности может произойти только там, где: а) N обращается в нуль, б) при дальнейшем движении по окружности N сделалась бы отрицательной (короче, где N меняет знак). Ясно, что в высшей точке C окружности условия а) и б) не могут быть одновременно удовлетворены, ибо N достигает здесь минимума. Следовательно, отрыв от окружности в ее высшей точке произойти не может. Как видно из (4) и (5), отрыв в действительности происходит, когда $2gR < v_0^2 < 5gR$, т. е. в положениях, характеризуемых неравенством $90° < \alpha_1 < 180°$ (напр., при $v_0^2 = 4gR$ $\alpha_1 \approx 132°$).

В вышеприведенном доказательстве принято, что единственной активной силой, действующей на точку M, является ее вес. Полученный результат легко обобщить и на тот случай, когда точка M движется по окружности *равномерно*, подвергаясь действию добавочной силы T, направленной по касательной к траектории (летчик, находящийся в самолете, описывающем «мертвую петлю» с постоянной скоростью; вода в ведерке, которое равномерно вращают в вертикальной плоскости и т. п.). Уравнение (1) остается в силе, а уравнение энергии (2) теперь уже не имеет места. Если через $A(\alpha)$ обозначим работу, произведенную силой T, то

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-mgR\,(1-\cos\alpha)+A(\alpha), \tag{6}$$

и величина реакции в этом случае выразится формулой

$$N=mg\left[\frac{v_0^2}{gR}-2+3\cos\alpha+\frac{2A(\alpha)}{mgR}\right]. \tag{7}$$

Если скорость точки M постоянна, $v=v_0$, то, согласно (6),

$$A(\alpha)=mgR(1-\cos\alpha).$$

Подставляя это в (7), имеем:

$$N=mg\left(\frac{v_0^2}{gR}+\cos\alpha\right). \tag{8}$$

Как видно, и в этом случае реакция N в высшей точке C петли достигает минимума и, следовательно, отрыв от связи здесь произойти не может.

Таким образом, формулировка задач типа «мертвая петля», если в ней упоминается о «выпадении из петли в верхней точке», — не соответствует действительности. К сожалению, эту ошибку можно найти почти в каждом школьном задачнике или учебнике[5]. В упомянутой статье М. А. Грабовского такую формулировку встречаем дважды — на стр. 93 и 94. В «Курсе физики» Н. П. Третьякова приведен даже рисунок (рис. 118б на стр. 196), изображающий привязанный на нити камень, который, описав дугу окружности в вертикальной плоскости, покидает эту окружность в самой верхней ее точке и движется дальше по параболе.

В некоторых иностранных учебниках и книгах по физике положение тоже не лучше[6].

Правильную формулировку задачи можно найти в сборниках задач по теоретической механике И. В. Мещерского, И. Н. Веселовского и Н. Н. Бухгольца.

2. М. А. Грабовский предлагает решать задачу движения по «мертвой петле» при помощи так называемых естественных уравнений движения (уравнения (1) и (2) в указанной статье; между прочим, уравнение (2) почему-то записано без необходимого знака минус в левой части — ведь $\sin\alpha$ и j имеют противоположные знаки!). Едва ли целесообразно решать в школе задачи подобного типа так, как они решаются в теоретической

---

[5] Напр., кроме вышеуказанных: Сборник вопросов и задач по физике, под ред. П. А. Рымкевича, Л., 1957, р. 72; В. П. Демкович, Сборник задач по физике, Л., 1957, р. 66; Сборник задач по физике, под ред. Н. Н. Демидова, М., 1948, р. 83; А. В. Перышкин, Курс физики, ч. II, М., 1958, р. 22; Физика, состав. Д. Д. Галанин, М., 1953, р. 185; И. И. Соколов, Курс физики, ч. I, М., р. 246; Я. И. Перельман, Занимательная физика, кн. II, М.—Л., 1949, р. 54, 68.

[6] A. Recknagel, Physik, Mechanik, VEB Verlag Technik Berlin, 1955, p. 129, 130; R. Rothe. Höhere Mathematik, III, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956, p. 142; G. Niese, Wie kommt denn das? Der Kinderbuchverlag Berlin, 1958, p. 178.

механике. Во-первых, метод естественных уравнений непривычен для ученика IX класса (и, вообще, под силу ли ему?). Во-вторых, при таком решении задачи логической точкой опоры становится утверждение, что «... пока сила F (сила реакции.— Л. К.) больше нуля, тележка не будет отрываться от рельс. Сила реакции может равняться нулю лишь в верхней точке петли C». Но вторая часть этого утверждения отнюдь не очевидна. Вдумчивый ученик может спросить: Если в точке C $F=0$, то обязательно ли будет $F>0$ в других точках окружности? Если будет, то почему? Почему сила реакции не должна обращаться в нуль в более низкой точке?

Дать ответ на эти и подобные вопросы можно только зная закон изменения реакции, зная, по крайней мере, факт, что реакция в верхней точке имеет минимум. Поэтому рекомендуемый М. А. Грабовским способ решения задачи, сводящийся к подстановке в естественные уравнения значений $\alpha=180°$ и $F=0$ и оставляющий в стороне установление факта, что F при $\alpha=180°$ достигает минимума, представляется нам поверхностным, формальным.

Наличие минимума реакции в верхней точке окружности, кроме примененного нами способа, посильного и для ученика IX класса [см. уравнения (1), (2) и (3)], можно обнаружить следующим простым рассуждением. Центростремительной силой при движении тела по окружности в вертикальной плоскости является сумма давления на тело со стороны окружности и составляющей веса тела по направлению радиуса. В верхней точке скорость тела, а, значит, и центростремительная сила, наименьшая. Поскольку в этой точке составляющая веса по направлению радиуса равна самому весу и направлена, как и центростремительная сила, вниз, то ясно, что давление окружности на тело здесь наименьшее.

Присоединяя к этому рассуждению формулу

$$N=\frac{mv^2}{R}-mg,$$

написанную для верхней точки C окружности, и требуя, чтобы $N=0$ (для других точек тогда непременно $N>0$), получаем простое и строгое решение задачи. При таком способе решения, в сущности, используется только частный случай первого естественного уравнения; второе естественное уравнение делается совершенно ненужным[7].

Итак, последовательное решение задачи о «мертвой петле» должно включать в себе 3 момента: а) установление условия отрыва от кривой связи, б) установление того, что реакция связи в верхней точке достигает минимума, в) требование, чтобы минимальное значение реакции равнялось нулю (или, в общем случае, не было отрицательным).

В книгах по физике и в преподавании весьма распространен другой путь решения, примером которого может служить следующий отрывок из «Занимательной физики» Я. И. Перельмана: «... для того чтобы велосипедист, достигнув высшей точки кругового пути, не упал вниз, нужно, чтобы ... центростремительное ускорение было больше, нежели ускорение тяжести, т. е.... $\frac{v^2}{r}>g$»[8].

---

[7] Факту, что второе естественное уравнение в точке C принимает вид $mj=0$, М. А. Грабовским дано странное истолкование: «(...) в этот момент тележка движется равномерно». Тангенциальное ускорение $j=dv/dt$ равно нулю в C по той простой причине, что здесь v достигает минимума. Никакой равномерности движения здесь нет. Понятие мгновенного равномерного движения в механике отсутствует, так как содержание его бессмысленно.

[8] Р. И. Перельман, Занимательная физика, кн. II, М.—Л., 1949, р. 68.

Кажется, что налицо краткое, ясное решение. Однако это решение нельзя считать корректным, так как из приведенного рассуждения следует нелепый вывод о том, что, в случае невыполнения условия $\frac{v^2}{r} \geqslant g$, *велосипедист, достигнув высшей точки пути, упадет вниз.* Вообще, решения подобного типа внушают учащимся ложную мысль о том, будто самым опасным местом на «мертвой петле» является высшая точка (эту мысль еще более подчеркивают неправильные формулировки условий задач, упоминающие о «выпадении из петли в верхней точке»). Несостоятельность этого взгляда после того, что сказано в п. 1, очевидна.

3. Попытка сопоставления движения по «мертвой петле» и движения по параболе наклонно брошенного тяжелого тела сделана М. А. Грабовским с целью дать интуитивное объяснение того обстоятельства, что тело

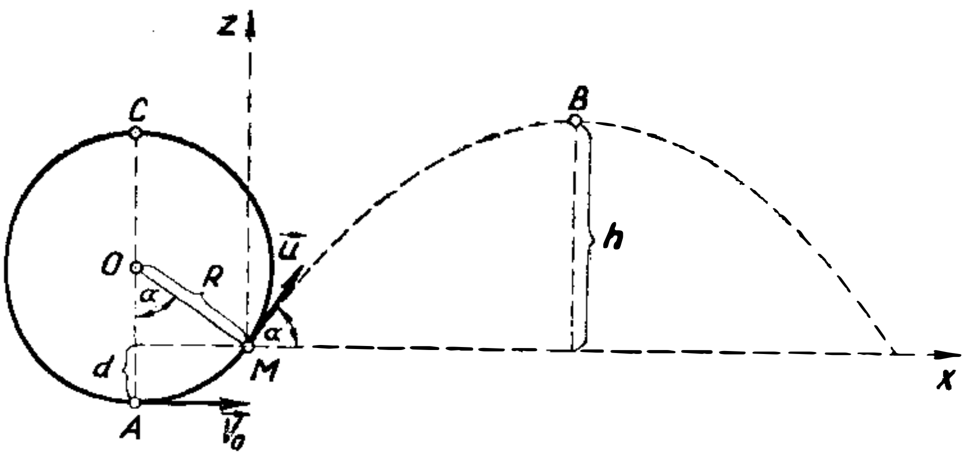

Рис. 2

в наивысшей точке петли не падает вниз. Эта попытка является необоснованной и вместо того, чтобы пояснить, может только запутать явление. М. А. Грабовский пишет: «Движение тележки по «мертвой петле» можно рассматривать как случай движения тела, брошенного с начальной скоростью под углом к горизонту, усложненный непрерывным действием на тележку деформируемых ею рельс, т. е. как движение тела по заданному пути. При сопоставлении этих двух движений у учащихся не должен возникать вопрос: почему тележка в наивысшей точке петли не падает вниз? Ведь камень, брошенный под углом к горизонту, тоже не сразу падает вниз...»

Во-первых, как показано в п. 1, тележка в наивысшей точке петли никогда не падает вниз. Во-вторых, тот факт, что тележка не падает, можно было бы объяснить при помощи сопоставления упоминаемых двух движений только при условии, что высшую точку C петли тележка достигает всегда, т. е. при любом угле бросания α (рис. 2), раньше чем она поднялась бы в вершину B соответствующей параболы (так как в тот момент, когда тележка находится в C, при движении по параболе она еще поднималась бы вверх). Однако это условие выполняется далеко не всегда. Расчет, которого мы здесь не приводим, показывает, что для α, меньших α_2, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{2gR}{v_0^2}\left[K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)-F\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}, \frac{\alpha_2}{2}\right)\right]=\sin\alpha_2, \qquad (9)$$

где $F\ (k,\ \varphi)$ и $K(k)=F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ — эллиптические интегралы первого рода, время t', за которое тележка M приходит в верхнюю точку петли C, больше времени t, в течение которого тележка поднялась бы до высшей точки В соответствующей параболы (напр., если $v_0^2=5gR$, то $\alpha_2 \approx 51°$). Поэтому при углах $\alpha < \alpha_2$ сопоставление движения тележки по петле и ее воображаемого движения по параболе, которое происходило бы при отсутствии связи, ничего не поясняет: почему в точке C петли тележка не падает, если при движении по параболе она в этот же момент t' уже «падала бы на землю»?! Вопрос еще более усложняется, если заметим, что для α, меньших α_3, определяемого из уравнения

$$\sin^2\frac{\alpha_3}{2}=\frac{v_0^2-\sqrt{v_0^4-16g^2R^2}}{8\,gR}, \tag{10}$$

наибольшая высота подъема по параболе h меньше высоты $2R-d$ верхней точки C петли (напр., если $v_0^2=5gR$, то $\alpha_3=60°$). Таким образом, если α одновременно меньше α_2 и α_3 (напр., при $v_0^2=5gR$ $\alpha<51°$), то тележка достигает точки C, находящейся *выше* вершины B соответствующей параболы, в такой момент, когда при движении по этой параболе она *уже опускалась бы вниз.* Почему она тогда не падает в верхней точке? Интуитивное сопоставление двух указанных движений в этом случае ничего не поясняет; наоборот, оно запутывает. Особенно ярко это видно в частном случае $\alpha=0$, когда тележка, двигаясь по параболе, *все время* падала бы вниз.

Между движением тележки по параболе и движением ее по петле имеется только то общее, что скорость v на одном и том же уровне z одинакова в обоих движениях ($v^2=u^2-2gz$). Однако в упомянутых движениях различны как уровни, так и моменты прохождения через эти уровни. Отсюда ясно, почему сопоставление этих движений в общем случае неприменимо.

Если уж требуется сравнить движение тележки по петле с чем-нибудь, то можно заметить, что это движение есть не что иное, как круговращательное движение математического маятника длиной $l=R$, осуществляющееся при $v_0^2 \geqslant 5gR$. Это обстоятельство легко выявить конструкцией прибора «мертвая петля»: вместо одной можно сделать несколько равных петель и расположить их рядом так, чтобы тележка, описав первую из них, попала бы во вторую и т. д.

4. Отметим еще два момента в статье М. А. Грабовского, которые могут привести к ошибочным представлениям.

На стр. 95 автор утверждает: «. . . в случае, если шарик будет скатываться по желобу, когда радиус окружности его качения будет равен радиусу шарика, потребная высота составляет $2{,}7R$ (R — радиус петли — Л. К.)».

Создается впечатление, что высота H не зависит от радиуса шарика a. В действительности $H=2{,}7\ (R-a)$, причем следует заметить, что этот результат имеет чисто теоретическое значение, так как при его выводе делается предположение о том, что поверхность желоба абсолютно шероховата (коэффициент трения равен бесконечности). В самом деле, из уравнений чистого качения шарика по желобу нетрудно получить, что нормальная реакция

$$N=\frac{10}{7}P\left(\frac{H}{l}-1+1{,}7\cos\alpha\right) \tag{11}$$

и что условие отсутствия скольжения выражается неравенством

$$f \geqslant \frac{1}{5}\,\frac{\sin\alpha}{\frac{H}{l} - 1 + 1{,}7\cos\alpha}\qquad (12)$$

Здесь P — вес шарика, H — разность наибольшей и наименьшей высот его центра, $l=R-a$, α — угол между радиусом-вектором центра шарика и направленной вниз вертикалью, f — коэффициент трения покоя.

Если $H=2{,}7l$, то (12) приобретает следующий вид:

$$f \geqslant \frac{1}{8{,}5}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.\qquad (13)$$

Правая часть этого неравенства в интервале $(0, \pi)$ монотонно возрастает от нуля до бесконечности. Если коэффициент трения между поверхностями желоба и шарика μ, то при $\alpha^1=2\operatorname{arctg}8{,}5\mu<\pi$ шарик начинает скользить по желобу. Часть кинетической энергии шарика поглощается трением, и реакция связи $N=\frac{Pv^2}{gl}+P\cos\alpha$, вместо того, чтобы при отсутствии скольжения исчезнуть в верхней точке, обращается в нуль раньше; в верхней точке она становится отрицательной. Таким образом, при $H=2{,}7l$ и при конечном коэффициенте трения μ шарик не может сделать «мертвой петли»: он отрывается от желоба, не доходя до его верхней точки. Чтобы шарик не скользил, надо увеличить высоту H; например, при $H=2{,}972l$ условием чистого качения является неравенство $\mu \geqslant 0{,}2$.

На этой же стр. 95, после описания конструкции тележки для опытов с тремя шариками, один из которых вложен в стойку с кольцом (рис. 4 на этой странице), говорится, что «При движении такой системы третий шарик не вращается, а обладает только поступательным движением . . .» Это неверно, так как этот шарик совершает как раз вращательное движение. Ось его вращения перпендикулярна к плоскости петли и проходит через ее центр, а угловая скорость $\dot\alpha$ вращения равна угловой скорости центра масс всей движущейся системы. Пренебрегая массой проволоки и считая, что центры шариков находятся в вершинах правильного треугольника со стороной $2a$, нетрудно показать, что

$$\dot\alpha^2 = 30\,g\,\frac{H - l(1-\cos\alpha)}{5l_1^2 + 2a^2 + 14(R-a)^2},\qquad (14)$$

где g — ускорение свободного падения, H — разность наибольшей и наименьшей высот центра масс системы, l — расстояние центра масс до центра петли, $l_1=\sqrt{R(R-2a)}-a\sqrt{3}$.

И здесь следует заметить, что задача о «мертвой петле» для систем шариков, описанных М. А. Грабовским, приводит к иному ответу, чем в случае одного шарика. Например, при только что упомянутой структуре системы трех шариков наименьшая высота H, с которой надо пустить систему для того, чтобы она описала петлю, определяется, как показывают расчеты, формулой:

$$H=\frac{79(R-a)^2-28a^2-50a\sqrt{3R(R-2a)}}{30\sqrt{R(R-2a)}-10\sqrt{3}a}.\qquad (15)$$

Только при $\frac{a}{R}\approx 0{,}15$ эта высота равна $2{,}7l$. Если $\frac{a}{R}<0{,}15$, то $H<2{,}7l$; если $\frac{a}{R}>0{,}15$, то $H>2{,}7l$. Когда $\frac{a}{R}\to 0{,}464$ (наибольшее возможное значение отношения $\frac{a}{R}$), то $H \to \infty$. Возможное скольжение опорных шариков в верхней части петли требует соответствующего увеличения H.

5. Для равномерного движения тяжелой точки по окружности в вертикальной плоскости необходимо, чтобы на нее действовала добавочная сила, направленная по касательной к траектории (п. 1). Если в условии соответствующей задачи о таком движении не указан источник упомянутой силы или вообще умалчивается факт тангенциального воздействия на движущееся тело, то задача приобретает двусмысленный характер и может привести к неверным результатам или совсем потерять физический смысл. Например, в учебнике физики под редакцией акад. Г. С. Ландсберга и в задачнике В. П. Демковича находим следующую задачу[9]: «Грузик, масса которого равна 20 *г*, прикреплен к нитке длиной 30 *см* и движется по окружности в вертикальной плоскости, делая 1 оборот в секунду. Каково натяжение нити в верхней точке окружности и в нижней?»

Если грузик считать материальной точкой, то из первого предложения этого условия следует, что речь идет о круговращательном движении математического маятника. Период круговращательного движения маятника дается формулой:[10]

$$T = \frac{4K(k)}{\dot{\alpha}_0}; \quad k = \frac{2}{\dot{\alpha}_0}\sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{16}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\dot{\alpha}_0$ — угловая скорость маятника в наинизшем положении. Для $l=30$ *см* наибольшее возможное значение периода $\left(\text{когда } \dot{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{5g}{l}}\right)$ — равно 0,71 сек. Следовательно, утверждение условия задачи о том, что грузик движется «делая 1 оборот в секунду»,— нереально. Поэтому условие задачи необходимо видоизменить, например, так: *грузик, масса которого 20 г, равномерно вращают в вертикальной плоскости на нитке длиной 30 см, делая 1 оборот в секунду,* и т. д. Эта формулировка указывает, хотя и не совсем определенно, на факт тангенциального воздействия на грузик и устраняет всякую двусмысленность.

В сборнике под ред. П. А. Знаменского[11] имеется задача: «Гиря весом 200 *Г* вращается на нити в вертикальной плоскости. На сколько сила натяжения нити будет больше при прохождении гири через нижнюю точку, чем через верхнюю?»

И здесь, по условию, гиря совершает круговращательное движение маятника. По формуле (3) (п. 1) разность натяжений нити в нижней и верхней точках будет $6mg = 1200Г$, в то время, как ответ дает в три раза меньшую величину — 400 *Г*. Только по расхождению этих ответов можно догадаться, что автор задачи под выражением «гиря вращается . . .» подразумевает факт, что «гирю *равномерно вращают* . . .»

ПРИЛОЖЕНИЕ

К статье «Несколько замечаний к задаче о «мертвой петле».

I Вывод уравнения (9).

Движение тележки M по петле (рис. 2) происходит так, как круговращательное движение математического маятника длиной $l=R$. Поэтому время t', за которое

---

[9] Элементарный учебник физики, под ред. акад. Г. С. Ландсберга, I, М., 1958, р. 220, В. П. Демкович, Сборник задач по физике, Л., 1957, р. 66, 67.

[10] А. Г. Лойцианский, А. И. Лурье, Курс теоретической механики, II, М., 1954, р. 450.

[11] Сборник вопросов и задач по физике, под ред. П. А. Знаменского, М., 1958, р. 58.

тележка поднимается по дуге MC равно $\frac{T}{2}-\tau$, где T — период круговращательного движения тележки, τ — время, за которое она проходит дугу AM. Вычислим τ:

$$\tau=\int_0^\tau dt=\int_0^s\frac{d\sigma}{v_\sigma}=\int_0^\alpha\frac{R\,d\varphi}{v_\varphi}.$$

Скорость тележки меняется с высотой по закону [см. (2)]:

$$v^2=v_0^2-2gR(1-\cos\varphi)=v_0^2-4gR\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому

$$\tau=\int_0^\alpha\frac{R\,d\varphi}{\sqrt{v_0^2-4gR\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{R}{v_0}\int_0^\alpha\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4gR}{v_0^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{2R}{v_0}\int_0^{\alpha/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4gR}{v_0^2}\sin^2\psi}}.$$

Окончательно

$$\tau=\frac{2R}{v_0}\int_0^{\alpha/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)^2\sin^2\psi}}=\frac{2R}{v_0}F\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0},\frac{\alpha}{2}\right).$$

Период T выражается формулой [см. (16)]

$$T=\frac{4K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)}{\alpha_0}=\frac{4R}{v_0}K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right).$$

Поэтому

$$t'=\frac{2R}{v_0}\left[K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)-F\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0},\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

С другой стороны, время t, за которое тележка поднялась бы до вершины B параболы, равно:

$$t=\frac{u}{g}\sin\alpha=\frac{\sqrt{v_0^2-2gR(1-\cos\alpha)}}{g}\sin\alpha$$

или

$$t=\frac{\sqrt{v_0^2-4gR\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{g}\sin\alpha.$$

Неравенство $t'>t$ будет удовлетворено, если

$$\frac{2R}{v_0}\left[K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)-F\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0},\frac{\alpha}{2}\right)\right]>\frac{v_0}{g}\sin\alpha,$$

или

$$\frac{2gR}{v_0^2}\left[K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)-F\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0},\frac{\alpha}{2}\right)\right]>\sin\alpha.$$

Левая сторона этого неравенства в интервале $[0,\pi]$ убывает от значения $\frac{2gR}{v_0^2}K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)$ до нуля. Так как при $v_0^2>5\,gR$ (условие круговращательного движения маятника в случае односторонней связи) величина $\frac{2gR}{v_0^2}K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)<1$ то ясно, что корень α_2 уравнения $\frac{2gR}{v_0^2}\left[K\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0}\right)-F\left(\frac{2\sqrt{gR}}{v_0},\frac{\alpha^2}{2}\right)\right]=\sin\alpha_2$ заключен в интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и для $\alpha<\alpha_2$ будет $t'>t$. Приближенное значение $\alpha_2\approx51^\circ$ корня уравнения [9] (когда $v_0^2=5g\,R$) нетрудно получить пользуясь таблицами эллиптических интегралов и графиков функции $F\,(k,\varphi)$ при постоянном k (см. Е. Янке и Р. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М.—Л., 1949, р. 160, 180).

II. Вывод уравнения (10).

Высота h (см. рис. 2) определяется формулой:

$$h = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 - 4\,gR\,\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2g}\,\sin^2\alpha$$

Неравенство $2R—d>h$ после несложных преобразований можно привести к виду

$$4\,gR\,\sin^4\frac{\alpha}{2} - v_0^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + gR > 0.$$

Разложив на множители левую часть, имеем:

$$4\,gR\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - 16\,g^2R^2}}{8\,gR}\right)\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - 16\,g^2R^2}}{8\,gR}\right) > 0.$$

Если $v_0^2 \geqslant 5gR$, то $\dfrac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - 16\,g^2R^2}}{8\,gR} \geqslant 1.$

Поэтому для выполнения неравенства $h<2R—d$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} < \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - 16\,g^2R^2}}{8\,gR}.$$

Отсюда приходим к уравнению (10).

III. Вывод соотношений (11), (12) и (13).

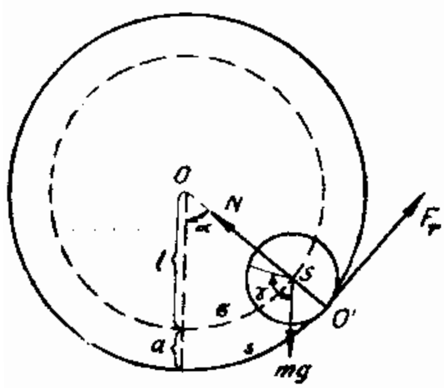

Рис. 3

Уравнения чистого качения шарика следующие:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_T, \quad \text{(a)}$$

$$I\ddot{\gamma} = -F_T a, \quad \text{(b)}$$

$$s = a(\alpha + \gamma).$$

Здесь $\ddot{\mathbf{r}}$ —ускорение центра масс S, m — масса шарика, $I = \frac{2}{5}\,ma^2$ — момент инерции его относительно диаметра, γ — угол поворота шарика (другие обозначения даны на рис. 3). Спроектируем уравнение (a) на направление касательной и главной нормали к траектории центра масс:

$$m\ddot{\sigma} = -mg\sin\alpha + F_T, \quad \text{(c)}$$

$$m\frac{\dot{\sigma}^2}{l} = -mg\cos\alpha + N. \quad \text{(d)}$$

Скорость центра масс $\dot{\sigma} = l\dot{\alpha}$. Поэтому $\ddot{\sigma} = l\ddot{\alpha}$. С другой стороны, $\dot{\sigma} = a\dot{\gamma}$, так как шарик катится без скольжения. Значит, $\ddot{\sigma} = a\ddot{\gamma}$. Подставляя значения $\ddot{\sigma}$ и $\ddot{\gamma}$ в (c) и (b), находим:

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha + F_T,$$

$$I\frac{l}{a}\ddot{\alpha} = -F_T a.$$

Исключая из этих двух уравнений $\ddot{\alpha}$, получим:

$$F_T = mg\frac{k^2}{a^2 + k^2}\sin\alpha = \frac{2}{7}\,mg\sin\alpha,$$

где $k = a\sqrt{\frac{2}{5}}$ — радиус инерции шарика относительно его диаметра.

Так как связь стационарна и единственной совершающей работу силой является вес mg, то энергия шарика сохраняет постоянное значение, равное mgH, где H — высота, с которой шарик пускается по жёлобу (без толчка):

$$\frac{m\dot{\sigma}^2}{2} + \frac{I\dot{\gamma}^2}{2} + mgl(1 - \cos\alpha) = mgH.$$

Определив отсюда $m\dot{\alpha}^2$, подставляем это в (d) и, после несложных преобразований, приходим к (11).

Если f — коэффициент трения между поверхностями шарика и желоба, то

$$F_T \leqslant fN.$$

Подставляя сюда найденные значения F_T и N, получаем неравенство (12).

В случае $\frac{H}{l} = 2{,}7$ из (12), на основании известного соотношения $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, непосредственно получается неравенство (13).

Если при $\alpha = 180°$ $N = 0$, то из (11) следует: $H = 2{,}7\, l = 2{,}7\,(R-a)$. Об этом говорится в статье (в начале п. 4).

IV. Вывод соотношений (14) и (15).

Уравнение движения центра масс системы такое:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = M\mathbf{g} + \mathbf{\Phi}.$$

Здесь $M = 3\,m$ — масса всей системы, $\ddot{\mathbf{R}}$ — ускорение центра масс, $\mathbf{\Phi}$ — равнодействующая реакций связи, действующих на опорные шарики.

Проектирование этого уравнения на направление главной нормали к траектории центра масс даст (см. рис. 4):

$$\frac{M\dot{s}^2}{l} = -Mg\cos\alpha + \Phi_R.$$

Отсюда величина нормальной составляющей реакции равна:

$$\Phi_R = Mg\cos\alpha + \frac{M\dot{s}^2}{l}. \qquad \text{(f)}$$

По закону сохранения энергии

$$T_1 + T_2 + T_3 + V = const. \qquad \text{(g)}$$

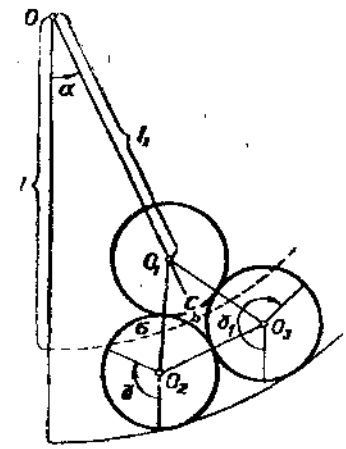

Рис. 4

где T_1, T_2, T_3 — кинетические энергии шариков, V — потенциальная энергия системы, равная $Mgl(1-\cos\alpha)$. Так как угловая скорость первого шарика равна $\dot{\alpha}$, то

$$T_1 = \frac{m}{2} l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2 = \frac{m\dot{\alpha}^2}{2}\left(l_1^2 + \frac{2}{5}a^2\right).$$

Аналогично:

$$T_2 = T_3 = \frac{m}{2}(R-a)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{I}{2}\dot{\gamma}^2$$

($\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1$, так как линейные скорости центров O_2 и O_3 одинаковы и равны $(R-a)\dot{\alpha}$).

Подставляя эти значения в (g) и замечая, что $a\dot{\gamma} = (R-a)\dot{\alpha}$ и что $const = 3\,mgH$, после простых преобразований получим соотношение (14).

Из (f), замечая, что $\dot{s} = l\dot{\alpha}$ и пользуясь (14), находим:

$$\Phi_R = Mg\left[\cos\alpha + 30\,l\,\frac{H - l(1-\cos\alpha)}{5\,l_1^2 + 2a^2 + 14(R-a)^2}\right].$$

Чтобы система описала петлю, необходимо и достаточно выполнение условия: $\Phi_R = 0$ для $\alpha = 180°$. Оно и приводит к соотношению (15), если вместо l_1 и l подставить соответственно величины

$$\sqrt{(R-a)^2 - a^2} - a\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \sqrt{(R-a)^2 - a^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

которые получаются из элементарных геометрических соображений.

ВГПИ
Кафедра теоретической физики

Представлено
1961 г., март

KELETAS PASTABŲ APIE „MIRTIES KILPOS" UŽDAVINĮ

L. KULVIECAS

Reziume

Straipsnyje išnagrinėtas žinomas mechanikos uždavinys apie svaraus taško judėjimą vertikaliu apskritimu, išaiškinta, kad vienpusio ryšio atveju (net ir tuomet, kai nagrinėjamąjį tašką veikia papildoma tangentinė jėga, sąlygojanti jo tolyginį judėjimą apskritimu) materialus taškas niekada negali atitrūkti nuo ryšių kreivės aukščiausiame jos taške. Analogiškai taip pat negali atsiskirti nuo ryšių aukščiausiame vertikalios trajektorijos taške: 1) homogeniškas rutulys, riedąs šiurkštaus apskrito cilindro, kurio ašis horizontali, vidumi taip, kad rutulio masių centras išlieka vienoje vertikalioje plokštumoje, 2) trijų vienodų homogeniškų rutulių sistema sudaryta taip, kad jų centrai, likdami vertikalioje plokštumoje, sutampa su viršūnėmis lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi rutuliukų skersmeniui (du atraminiai rutuliukai rieda minėto šiurkštaus cilindro vidumi, o visa sistema sudaro tartum vežimėlį, judantį „mirties kilpa").

Iš gautųjų rezultatų nustatyta, jog elementariosios mechanikos uždavinių apie „mirties kilpą" formulavime ir sprendime yra kai kurių netikslumų; be to, pareikšta kritinės pastabos apie darbą, kuriame specialiai nagrinėjami tokio tipo uždaviniai.