G. BARSEGIANAS

ALGORITMAI IR PAŽINIMAS

Žmogaus mintis ne kartą susidurdavo su problemomis, kurios vėliau būdavo pripažįstamos neišsprendžiamomis. Tokia buvo amžinojo variklio sukūrimo problema, daugelį amžių jaudinusi fizikus, taip pat dar antikos matematikų keltas klausimas, ar galima sudaryti kvadratą, kurio plotas būtų lygus tam tikro apskritimo plotui (vadinamoji apskritimo kvadratūros problema). Amžinojo variklio negalimumas buvo galutinai įrodytas remiantis energijos tvermės bei antruoju termodinamikos dėsniais, o 1882 metais F. Lindemanas panaikino „apskritimo kvadratūros" problemą. Jis įrodė, kad apskritimo plotas ne tik negali būti išreikštas baigtiniu operacijų su kvadratinėmis šaknimis skaičiumi, bet ir iš viso jo neįmanoma išreikšti bet kokio rodiklio šaknimi. Kitaip tariant, negalima rasti tokį pakankamai mažą kvadratą, kuris tilptų apskritimo plote lyginį skaičių kartų, t. y. kurio santykis su apskritimo plotu būtų išreiškiamas racionaliu skaičiumi. Tai reiškia, kad bet kurio kvadrato ploto santykis su apskritimo plotu visuomet yra *iracionalus* santykis, kuris išreiškiamas *iracionaliu* skaičiumi.

Iracionalių santykių egzistavimas ilgą laiką buvo iš viso nežinomas. Jų atradimas sukėlė tikrą matematikų sumišimą. Net iki XIX a. pabaigos iracionalūs skaičiai buvo laikomi kažkuo neteisėtu, neturinčiu teisės egzistuoti. Šis įsitikinimas, matyt, sąlygojo nenuilstamas pastangas išspręsti apskritimo problemą. Jų nevaisingumo priežastis — premisa, jog santykis tarp kvadrato ploto ir tam tikro apskritimo ploto išreiškiamas racionaliu skaičiumi. Tokia pat klaidinga premisa slypėjo ir amžinojo variklio problemoje: buvo manoma, jog jo sukūrimo būdas egzistuoja, tereikia jį rasti. Todėl šių problemų „neišsprendžiamumas" labai sąlygiškas,— tikriau pasakius, tai reiškia, kad jos neteisingai suformuluotos. Platesne prasme jos ne tik išsprendžiamos, bet ir išspręstos, t. y. išspręstos negatyviai, nes įrodyta jų premisų klaidingumas.

Nesunku pastebėti analogiją tarp šių problemų ir tos „problemos", kurią sprendė viduramžių scholastai: ar visagalis dievas gali sukurti akmenį, kurio pats negalėtų pakelti? Ir šiuo atveju problema remiasi premisa, kad „visagalis dievas" egzistuoja. Tačiau šiuo atveju premisa akivaizdžiai veda į loginį prieštaravimą. Lygiai taip pat įjungimas į teoriją ir teiginių apie amžinojo variklio egzistavimą arba galimumą išreikšti santykį tarp kvadrato ir apskritimo ploto racionaliais skaičiais būtų vedę į prieštaravimus atitinkamose teorijose.

Kaip tik tokia padėtis susidarė XIX—XX a. G. Kantoro „naiviojoje" aibių teorijoje pripažįstant „visų aibių aibę". Susidariusi padėtis bei aiškinimas prieštaravimų išvengimo būdų buvo galingas akstinas visos matematikos bei apskritai mokslo vystymuisi.

Taigi „neišsprendžiamų" problemų egzistavimas tam tikra prasme toli gražu nėra žmogaus proto ribų bei galimybių rodiklis. Juoba, kad vien jų neišsprendžiamumo įrodymas yra padarinys to, jog protas atrado tokius gilius dėsningumus, kurių atžvilgiu ankstesnės premisos pasirodė esančios nepagrįstos.

Panagrinėkime tą *neišsprendžiamumo* problemos sąvoką, kuri susidarė dabartinėje matematikoje. Būdingas jos bruožas tas, kad ji taikytina tik masinėms problemoms, t. y. begalinėms klasėms mokslinių užduočių, kurios gali būti charakterizuojamos vieningai, efektyviai atpažįstama sąlyga. Bet kurios tokios klasės nebaigiamumas yra esminis masinės problemos rodiklis, nes baigtinės klasės užduočių atžvilgiu nėra prasmės kalbėti apie bendrą jų sąlygų sudarymą: tokiu atveju klasė gali būti sudaroma išvardinant atskirų užduočių sąlygas. Ne mažiau svarbus reikalavimas efektyviai atpažinti tai, ar atskira užduotis patenkina sąlygą, charakterizuojančią masinę problemą apskritai, nes priešingu atveju pats klausimo dėl masinės problemos „sprendimo" kėlimas tampa neapibrėžtu.

Masinės problemos sąvoka turi fundamentalią metodologinę bei gnoseologinę reikšmę. Kiekvienam mokslui būdingas siekimas pereiti nuo paskirų faktų aprašymo bei paskirų užduočių sprendimo prie formulavimo bei sprendimo masinių problemų, apimančių kiek galima platesnę klasę tų tikrovės reiškinių, kurie aprašomi tame moksle. Pavyzdžiui, fizikos dėsniai gali būti laikomi bendrais masinių problemų sprendimo metodais. Į šių dėsnių formulavimą įjungiamos konstantos, charakterizuojančios masinę problemą apskritai, taip pat kai kurie kintamieji (arba parametrai): kiekvieną konkretų kintamųjų rinkinį atitinka tam tikra atskira užduotis. Todėl masinė problema gali būti apibūdinta kaip „užduotis su parametrais"[1]. Šitaip suprantamos masinės problemos sprendimas pasiekiamas nurodant tam tikrą taisyklę ar formulę su šiais kintamaisiais. Fizikos dėsniai yra kaip tik tokios taisyklės, nurodančios šios problemos sprendimo būdą.

Viena žinomiausių masinių problemų matematikoje yra vadinamoji dešimtoji Hilberto problema. D. Hilbertas šitaip formulavo ją 1900 m. Tarptautiniame matematikų kongrese: „Tegu duota diafantinė lygtis su laisvai pasirinktais nežinomaisiais ir sveikais racionaliais skaitmenimis koeficientais. Reikia nurodyti būdą, įgalinantį baigtiniu operacijų skaičiumi nusta-

[1] *Гастев Ю.* Массовая проблема.— Философская энциклопедия. М., 1960—1970, т. 3, с. 327.

tyti, ar ši lygtis išsprendžiama sveikais racionaliais skaičiais“[2]. Keldamas šią problemą, D. Hilbertas siekė sutelkti matematikų pastangas ieškant bendro algebrinių lygčių su sveikais koeficientais, išreikštais sveikais skaičiais (t. y. diafantinėmis lygtimis), sprendimo būdo. Matyt, jis tikėjosi, jog toks metodas anksčiau ar vėliau bus surastas, arba bent iš principo jis egzistuoja, ir jį tik reikia surasti. Mintis, jog tokio metodo galbūt iš viso nėra, tuo metu vargu ar buvo prasminga: tam buvo reikalingos atitinkamos premisos.

Visų pirma reikėjo surasti matematinį sąvokos „bendras sprendimo metodas“ ekvivalentą. Tokiu ekvivalentu tapo *algoritmo* sąvoka, t. y. tam tikra griežta programa, nurodanti, kokie paprasčiausi veiksmai ir kokia tvarka turi būti atlikti su objektų sistema, konstruojant reikalingą objektą. Kai kurios tokio pobūdžio skaičiavimo procedūros buvo sukurtos jau antikos matematikų.

Paprasčiausiu pavyzdžiu gali būti skaičių sudėties stulpeliu taisyklė (dešimtainėje skaičių sistemoje). „Kalbant apie žmogaus gebėjimą sudėti skaičius, turima galvoje ne tai, kad bet kurių dviejų skaičių atveju jis anksčiau ar vėliau sugebės rasti jų sumą, o tai, jog jis yra išmokęs tam tikrą pastovų sudėjimo būdą, tinkamą bet kuriems dviems konkretiems skaičiams, t. y. išmokęs sudėties algoritmą“[3]. Kitais algoritmų pavyzdžiais gali būti natūralaus skaičiaus skaidymas į paprastus dauginamuosius, kvadratinės šaknies iš natūralaus skaičiaus traukimas, linijinių lygčių sistemos sprendimo procesas nežinomųjų nuoseklaus išjungimo metodu ir t. t.

Šiais požymiais apibūdinta algoritmo sąvoka nėra griežta, nes požymiams aprašyti naudojami žodžiai, kurių griežta reikšmė nenustatyta. Matematikai seniai ir vaisingai naudojasi intuityvia algoritmo sąvoka. Buvo išspręsta nemaža svarbių algoritminių problemų, nurodant konkrečias sprendimo procedūras.

XX a. padėtis iš esmės pakito. Į pirmą vietą iškilo tokios algoritminės problemos, kurių pozityvaus sprendimo egzistavimas buvo abejotinas. Iš tikrųjų, įrodyti algoritmo egzistavimą galima tik aprašius užduotį išsprendžiantį procesą. Tokiu atveju pakanka ir intuityvios sąvokos, tikrinant ar aprašytasis procesas yra algoritmas. Visai kas kita įrodyti jo nebuvimą. Tam reikalinga tiksliai žinoti, kas yra algoritmas. Dvidešimtaisiais mūsų amžiaus metais algoritmo sąvokos griežto apibrėžimo uždavinys tapo viena centrinių matematikos problemų. Ji buvo išspręsta dviem būdais D. Hilberto, K. Gedelio, A. Čiorčo, S. Klinio, E. Posto, A. Tjuringo ir A. Markovo darbuose. Pirmasis sprendimo būdas grindžiamas rekursyvios funkcijos sąvoka, antrasis — griežtai apibrėžtos procesų klasės aprašymu. Įrodyta, jog visi ligi šiol siūlyti algoritmo sąvokos patikslinimai — ekvivalentiški.

Po to, kai buvo suformuluota griežta algoritmo sąvoka ir įrodytas kai kurių masinių problemų neišsprendžiamumas, naujai iškilo Hilberto dešim-

[2] *Гильберт Д.* Математические проблемы.— В кн.: Проблемы Гильберта. М., 1969, с. 39.

[3] *Успенский В. А.* Алгоритмы.— Философская энциклопедия, т. 1, с. 38.

tosios problemos klausimas. Didžiuliai sunkumai, sprendžiant diafantines lygtis, vertė manyti, jog bendro jų sprendimo metodo (t. y. algoritmo) apskritai nėra. Todėl greta bandymų jį atrasti buvo dedamos pastangos įrodyti jo negalimumą. 1961 m. grupė amerikiečių matematikų (D. Devisas, H. Patnemas, J. Robinsonas) gavo reikšmingą rezultatą, įrodydami, jog daugelis aritmetinių užduočių, savo pobūdžiu artimų dešimtajai Hilberto problemai, sprendžiamos negatyviai. O pati problema dar keletą metų buvo neišspręsta. Tik 1970 m. tarybiniai matematikai J. Matijasevičius, vėliau G. Čudnovskis įrodė, jog ši problema algoritmiškai neišsprendžiama: metodas, apie kurį joje kalbama, neegzistuoja. Dar daugiau, galima nurodyti konkrečią diafantinę lygtį su vienu parametru, kurios atžvilgiu neegzistuoja būdas, leidžiantis nustatyti pagal parametro reikšmę ar ji išsprendžiama, ar ne.

Atkreipėme ypatingą dėmesį į Hilberto dešimtosios problemos neišsprendžiamumą ryšium su jo teze apie bet kurios matematinės problemos išsprendžiamumą (plačiąja prasme). Šioje frazėje glūdi gilus įsitikinimas neribota žmogaus proto galia ir besąlygiškas bet kokio agnosticizmo, bet kokio „ignorabimus“ atmetimas. „Bet kuri apibrėžta matematinė problema,— teigia D. Hilbertas,— būtinai gali būti griežtai išspręsta arba ta prasme, kad pavyks gauti atsakymą į klausimą, arba ta prasme, jog bus parodytas jos sprendimo negalimumas ir tuo įrodytas nesėkmių neišvengiamumas bandant ją išspręsti <...>. Matematikoje neegzistuoja ignorabimus“[4].

Matome, jog matematinių tyrimų patirtis įgalino D. Hilbertą suformuluoti savo tezę pakankamai bendru pavidalu, dėl to ji yra teisinga ir praėjus daugiau kaip 70 metų mokslo raidos laikotarpiui. Dešimtosios problemos neišsprendžiamumo įrodymas ne tik nekeičia šios tezės, bet net patvirtina ją. Ir tai liečia visas neišsprendžiamas problemas. Algoritminio neišsprendžiamumo teoremos neduoda jokio pagrindo agnosticizmui, nes kiekviena tokia teorema taikoma visai užduočių klasei ir nustato visų šios klasės užduočių neišsprendžiamumą vieningu efektyviu metodu — algoritmu. Tai visiškai nereiškia, jog tarp atskirų užduočių, priklausančių šiai klasei, yra tokių, kurios neišsprendžiamos. Masinės problemos neišsprendžiamumo faktas liudija tik tai, jog ji neteisėtai plačiai keliama, jokiu būdu neliečiant klausimo dėl neišsprendžiamumo siauresnės masinės problemos, gaunamos iš pirmosios dėl papildomų apribojimų, siaurinančių pirminę tiriamų užduočių klasę. Pavyzdžiui, siauresnėms masinėms problemoms buvo rasti algoritmai, įgalinantys ribotu žingsnių skaičiumi gauti atsakymą, ar tam tikra lygtis išsprendžiama sveikais skaičiais[5].

Algoritminio neišsprendžiamumo teoremos rodo, kad matematika neredukuojama į algoritmų sudarymą, jog pažinimo procesas negali būti iki

[4] *Гильберт Д.* Математические проблемы.— В кн.: Проблемы Гильберта, с. 21—22.

[5] Todėl klaidingas V. Makejevo teiginys, jog „masinių problemų algoritmas neegzistuoja“ (Žr. *Макеев В. М.* Проблема как форма мышления.— Автореферат канд. дисс. Киев, 1970, с. 10). Priešingai, algoritmas egzistuoja būtent masinių problemų sprendimui, tiesa, ne visų.

galo automatizuotas. Jau atskirose, palyginti siaurose, matematikos srityse (pvz., grupių teorijoje su ribotu sudedamųjų skaičiumi) kyla masinės problemos, kurių išspręsti negali joks automatas (t. y. jokia Tjuringo mašina su ribotu būsenų skaičiumi ir ribota atmintimi)[6]. Tuo labiau absurdiški teiginiai, jog mašina esą galinti visiškai pakeisti kūrybinį mokslininko darbą.

Tačiau kartu tenka pripažinti, jog algoritminių procesų taikymo sritis itin plati, ir jai priklauso ne tik matematiniai skaičiavimo procesai. Galima paminėti vienos kalbos vertimo į kitą algoritmus, geležinkelio dispečerio darbo algoritmą bei kitus algoritmiškai aprašomus valdymo procesus, kaip jie tiriami kibernetikoje. Daugeliui sunkių ir sudėtingų procesų galima sukurti iš esmės nelabai sudėtingus algoritmus. Tačiau juos įgyvendinant susiduriama su praktiniais sunkumais, nes tie algoritmai labai ilgi ir reikalauja didžiulio operacijų skaičiaus. Tokie yra algoritminiai lošimo procesų aprašymai, sakysim, šachmatai. Čia sėkmė labai priklauso nuo gebėjimo pamatyti platų variantų skaičių ir pasirinkti tinkamiausią.

Išvystytos matematinės algoritmų teorijos sukūrimas reikalauja jos gilios filosofinės analizės bei įprasminimo. Čia gali būti prieita prie išvadų, praturtinančių dialektinę pažinimo metodo sampratą. Bet būtų nepateisinama klaida bandyti nekritiškai perkelti šioje srityje pasiektus rezultatus į filosofiją ir tapatinti algoritminius procesus su pažinimo metodu. Pavyzdžiui, remiantis tam tikros masinės problemos algoritminio neišsprendžiamumo faktu, negalima daryti išvados apie bendro pažinimo metodo nebuvimą. Tai būtų tik atvirkščioji to paties „ignorabimus" pusė. Algoritmo sąvoka yra matematinė sąvoka, o joje reiškiamos taisyklės yra grynai formalios. Visai kas kita — filosofinis dialektinis materialistinis metodas. Jis neduoda ir negali duoti konkrečių nurodymų sprendžiant specialias užduotis, o nurodo bendrą kelią į tiesą bet kurioje tyrimo srityje. Iš dalies tai tas pats vidinis imperatyvas, apie kurį kalbėjo D. Hilbertas („<. . .> Štai problema, ieškok sprendimo <. . .>. Matematikoje nėra ignorabimus"), tačiau įsisąmonintas ir visapusiškai išvystytas, transformuotas iš neapibrėžto jausmo į turiningą ir visapusiškai išvystytą programą. Turiningumas apskritai yra labai svarbus dialektinio metodo bruožas. Būtent dėl savo turiningumo jis veda prie svarbių mokslinių rezultatų net tais atvejais, kai visi formalūs metodai pasirodo esą nepritaikomi. Visų pirma tai liečia kūrybinius procesus, nepavaldžius kokiai nors algoritmizacijai.

Žinoma, šiandienos požiūriu, būtų pageidautina kuo didesniam masinių problemų skaičiui rasti formalius sprendimo būdus. Tai leistų perduoti jas skaičiavimo mašinoms, būtų išlaisvintas žmogaus intelektas kitoms kūrybinėms užduotims spręsti. Tačiau iš anksto sunku pasakyti, ką tokiu atveju laimėtume ir ką prarastume. Galbūt kai kurių problemų algoritminio neišsprendžiamumo įrodymai turės tokių padarinių, kurių reikšmė ir vertė mokslo raidai žymiai pranoks tą poveikį, kurio tikimasi iš pozityvaus šių problemų sprendimo.

[6] *Трахтенброт Б. А.* Алгоритмы и машинное решение задач.— М., 1957, с. 96.