NETIESINIŲ EVOLIUCINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

Feliksas Ivanauskas
Vilniaus universitetas, Naugarduko 24, 2006 Vilnius
Matematikos ir informatikos institutas, Akademijos 4, 2035 Vilnius

ĮVADAS

Šiame pranešime paliesime netiesinių evoliucinių lygčių sprendimo klausimus. Šių lygčių sprendimas, skaitinių metodų kūrimas ir jų tyrimas Lietuvoje prasidėjo šešiasdešimtųjų metų viduryje. Šie klausimai glaudžiai susiję su skaitinės analizės, diferencialinių lygčių ir netiesinės optikos mokslinių mokyklų susikūrimu ir jų plėtra pastaraisiais metais.

Maksvelo lygtys yra išeities taškas matematiškai modeliuojant šviesos bangų sklidimą. Tačiau šių lygčių sprendinio analizinė išraiška net tiesiniame artinyje gaunama tik išimtiniais atvejais. Todėl teorinėje netiesinėje optikoje plačiai taikomi supaprastinti modeliai. Jie atspindi konkretaus optinio dažnio diapazono specifiką ir užtikrina pakankamą tikslumą. Lėtai kintančių amplitudžių metodas [1–3] yra efektyvus supaprastintų lygčių gavimo būdas netiesinėje optikoje. Jis pagrįstas banginės lygties sprendinio skleidimu eilute. Eilutės nariai yra lėtai kintančios laike ir erdvėje funkcijos. Šiuo atveju lėtai kintančios funkcijos tenkina evoliucines lygtis. Priklausomai nuo parametrų parinkimo yra gaunamos nestacionarios Šredingerio ar silpnai netiesinės hiperbolinės lygtys [1, 4]. Netiesinės Šredingerio lygtys atitinka kvazioptinį artinį [1, 2]. Šiuo atveju įskaitomi netiesiniai ir difrakciniai efektai.

Netiesinė kubinė Šredingerio lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\beta|u|^2 u, \qquad i^2 = -1, \tag{1}$$

yra viena iš labiausiai ištirtų netiesinių Šredingerio lygčių. Ji yra evoliucinė integruojama diferencialinė lygtis. Sprendinys u yra kompleksinė funkcija. Nesunku įrodyti, kad lygtis (1) turi bėgančios bangos pavidalo sprendinį

$$u = a\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(\frac{1}{2}bx - \left(\frac{1}{4}b^2 - a^2\right)\right)\right] \operatorname{sech}(x - bt),$$

čia a ir b yra laisvai pasirinktos konstantos. Netiesinė kubinė Šredingerio lygtis vaidina svarbų vaidmenį netiesinėje optikoje, plazmos fizikoje, kieto kūno fizikoje, hidrodinamikoje, molekulinėje biologijoje [5, 6]. Bendru pavidalu netiesines Šredingerio lygtis galima užrašyti

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + F(u),$$

čia A_j, B_j – diagonalinės realios matricos su pastoviais koeficientais, $F(u)$ – netiesinė funkcija (kaip taisyklė polinomas). Netiesinės Šredingerio lygtys pagal savo užrašymo formą yra artimos reakcijos-difuzijos ir Kuramoto-Cuzuki lygtims. Šios lygtys turi pavidalą

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(a+ib)\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+F(u).$$

Jei koeficientai $a \neq 0$, $b = 0$, tai turime reakcijos-difuzijos, o jei $a \neq 0$, $b \neq 0$, tai Kuramoto-Cuzuki lygtis. Kuramoto-Cuzuki lygtis aprašo daugelio dvikomponenčių sistemų elgesį bifurkacijos taško aplinkoje [7]. Reakcijos-difuzijos lygtys naudojamos tiriant daugelį netiesinių procesų [8]. Ryšium su tuo yra aktualus evoliucinių lygčių sprendimas. Atvirkštinės sklaidos metodu [9–11] pavyksta apskaičiuoti sprendinį analiziškai. Tačiau tik nedaugeliui evoliucinių lygčių galima taikyti atvirkštinės sklaidos metodą. Priedo šio metodo taikymo procedūra yra pakankamai sudėtinga. Dažnai apskaičiuotą sprendinį dėl jo sudėtingos užrašymo formos nepavyksta efektyviai panaudoti. Ryšium su tuo plačiai taikomi skaitiniai sprendimo metodai. Iš jų savo paprastumu ir universalumu išsiskiria baigtinių skirtumų metodas. Šio metodo pagrindų teorija yra išdėstyta A. Samarskio, G. Marčiuko ir jų mokinių darbuose [12–18]. Sprendžiant netiesines Šredingerio lygtis baigtiniu skirtumu metodu plačiai taikomas konservatyvumo principas [12]. Pagal šį principą diskretusis modelis privalo tenkinti duoto diferencialinio uždavinio atitinkamus integralinius tvermės dėsnius. Paprastai pagrindinis dėmesys skiriamas tik kai kuriems integraliniams tvermės dėsniams, kurie turi konkrečią fizikinę prasmę. Kai kurie modeliai prie tam tikrų sąlygų gali turėti begalinę seriją integralinių tvermės dėsnių. Kartu su konservatyviais sprendimo metodais plačiai taikomos nekonservatyvios ir nepilnai konservatyvios schemos [19–24]. Dabar paliesime tyrimus, paskelbtus [25–28]. Pagrindinį dėmesį skirsime netiesinėms Šredingerio lygtims. Tai susiję su tuo, kad daugelis rezultatų, gaunamų netiesinėms Šredingerio lygtims, nesunkiai apibendrinami Kuramoto-Cuzuki ir reakcijos-difuzijos lygtims. Netiesinių Šredingerio lygčių sprendimas palyginus su parabolinių lygčių sprendimu susijęs su eile principinių sunkumų. Tai išryškėja jau tiesinių lygčių atveju. Taip šilumos laidumo lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

galioja maksimumo principas ir su tuo susiję aprioriniai įverčiai. Tiesinei Šredingerio lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

maksimumo principas negalioja. Todėl negalima naudotis efektyvia parabolinių lygčių teorijos technika, paremta šiuo principu. Tai yra pirmasis sunkumas. Antrasis sunkumas išryškėja taikant baigtinių skirtumų metodą. Išreikštinė skirtuminė schema

$$u_t = iu_{\bar{x}x}$$

yra stabili, kai žingsnių santykis pagal evoliucinį ir erdvinį kintamuosius τ ir h tenkina sąlygą

$$\frac{\tau}{h^4}\leq const.$$

Šis žingsnių santykio apribojimas yra nenatūralus, nes bedimensinis dydis yra τ/h^2, o ne τ/h^4 [12]. Netiesinėms Šredingerio lygtims kaip taisyklė galioja tvermės dėsniai.

Taip kraštiniam uždaviniui netiesinei kubinei Šredingerio lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\beta|u|^2 u, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0,$$
$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad u(0,x) = u^{(0)}(x)$$

galioja integraliniai invariantai

$$\int_0^1 |u(t,x)|^2\,dx = const, \qquad \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 - \frac{\beta}{2}|u|^4\,dx = const.$$

Iš šių invariantų išplaukia aprioriniai įverčiai normose L_2 ir W_2^1. Jei turime trimatį atvejį, tai daugumai aktualių uždavinių galioja aprioriniai įverčiai normose L_2 ir W_2^1. Keturmačiu atveju galioja apriorinis įvertis normoje L_2 ir prie mažų pradinių sąlygų normoje W_2^1. Ryšium su tuo darbuose [25–28] buvo pasiūlytas klasikinių apriorinių įverčių apibendrinimas, kuris įgalina gauti efektyvius apriorinius įverčius skirtuminių uždavinių sprendiniams. Klasikiniuose aprioriniuose įverčiuose

$$\|u(t)\| \le c\,\|u(0)\|,$$

konstanta c nepriklauso nuo diferencialinio uždavinio sprendinio. Buvo pasiūlyti naujo tipo aprioriniai įverčiai

$$\|u(t)\|_{W_2^l} \le c\,\|u(0)\|_{W_2^l},$$

čia konstanta c jau priklauso nuo tam tikros sprendinio normos ir evoliucinio kintamojo kitimo intervalo. Taip $n+1$-mačio uždavinio atveju (n – erdvinių kintamųjų skaičius) konstanta c priklauso nuo sprendinio normos $C^j(Q)$, čia $Q = (0,T] \times \overline{\Omega}$, T – evoliucinio kintamojo kitimo intervalo ilgis, $\overline{\Omega}$ – erdvinių kintamųjų kitimo sritis, $j = [(n-1)/2]$.

Skirtuminių schemų pagrindimui yra aktualūs aprioriniai skirtuminio sprendinio įverčiai normoje C. Toks įvertis netiesinės skirtuminės schemos pagrindimą suveda iš esmės į tiesinės skirtuminės schemos pagrindimą. Kadangi tiesinės Šredingerio lygties sprendiniui galioja įverčiai normoje W_2^l tai kilo mintis gauti apriorinius įverčius normoje W_2^l. Ryšium su tuo buvo gauti apibendrinti įverčiai

$$\|u(t)\|_{W_2^l} \le c\,\|u(0)\|_{W_2^l},$$

čia konstanta c priklauso nuo diferencialinio uždavinio sprendinio normos $C^j(Q)$, evoliucinio kintamojo kitimo intervalo ilgio. Pagrindinė šių įverčių vertė yra ta, kad skirtuminio uždavinio atveju konstantoje c priklausomybę nuo skirtuminio sprendinio normos $C^j(Q_h)$ galima pakeisti priklausomybe nuo diferencialinio uždavinio normos $C^j(Q)$. Tokiu būdu gauname efektyvų apriorinį įvertį, kuris iš esmės atitinka klasikinio apriorinio įverčio sampratą. Šis įvertis vaidina svarbų vaidmenį įrodant skirtuminių schemų stabilumą ir konvergavimą.

Skaitinėje analizėje pagrindžiant netiesinius uždavinius tradiciškai taikomas įvertis

$$\|u\|_C \le c\,h^{-n/2}\|u\|_{L_2}, \tag{2}$$

čia n – matavimų skaičius. Šis įvertis yra tipiškas skaitinės analizės įvertis, neturintis tolydaus analogo. Šio įverčio taikymas, kaip taisyklė, iššaukia sąlyginį konvergavimą, tai yra, santykis tarp evoliucinio ir erdvinių kintamųjų žingsnių privalo tenkinti papildomą apribojimą. Tačiau jei $n > 2$, tai (2) įverčio taikymas tampa ne tik mažai efektyvus, bet dažniausiai neįmanomas. Darbuose [25–28] buvo pasiūlyta vietoje įverčio (2) taikyti Galjardo-Nyrenbergo multiplikatyvines nelygybes

$$\|u\|_C \leq c\,\|u\|_{L_2}^{\alpha}\|u\|_{W_2^l}^{1-\alpha}.$$

Šio įverčio taikymas reikalauja uždavinio sprendinio glodumo normoje W_2^l, $2l(1-\alpha) > 1$, $1 > \alpha > (n-1)/n$. Tai garantuoja sprendinio aprėžtumą normoje C. Sprendinio glodumas normoje W_2^l iš esmės atitinka sprendinio glodumą, būtiną aproksimacijai daugelyje konkrečių uždavinių. Todėl natūralu tikėtis, kad skirtuminės schemos sprendinys turės tą patį glodumą kaip ir diferencialinio uždavinio sprendinys. Kodėl parinkta norma W_2^l? Šis parinkimas pirmiausia yra paremtas aprioriniais įverčiais normoje W_2^l tiesinei Šredingerio lygčiai, antra – lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u,$$

spektrinėmis sąvybėmis. Šios lygties tikrinės funkcijos yra trigonometrinės funkcijos (sinusai ir kosinusai). Jei tinklas tolygus, tai trigonometrinės funkcijos (sinusai ir kosinusai) ir jų išvestinės yra ortogonalios atitinkamai parinktose skaliarinėse sandaugose. Todėl tinklines normas galima apibrėžti naudojantis Parsevalio lygybe. Tai leidžia gauti apriorinio įverčio skirtuminį analogą tiesinei Šredingerio lygčiai normoje W_2^l. Eidami šiuo keliu galų gale gausime skirtuminio uždavinio sprendinio efektyvius apriorinius įverčius normoje W_2^l. Apibendrinant galima pastebėti, kad netiesinio skirtuminio uždavinio išsprendžiamumas, skirtuminės schemos konvergavimas ir stabilumas iš esmės išplaukia iš pakankamai glodaus diferencialinio uždavinio sprendinio egzistavimo. Paskutinę pastabą galima suformuluoti dar taip: jei egzistuoja pakankamai glodus netiesinės Šredingerio lygties sprendinys, tai galima parašyti tokią skirtuminę schemą, kad šios schemos sprendinys konverguoja ir galioja konvergavimo ir stabilumo įverčiai atitinkamose normose. Šį posakį dar galima interpretuoti kaip apibendrinimą pagrindinės skaitinės analizės teoremos apie tai, kad iš aproksimacijos ir stabilumo seka konvergavimas. Šiuo atveju aproksimacijos sąlyga keičiama pakankamu sprendinio glodumu, o stabilumo sąlyga garantuojama apibendrintais aprioriniais įverčiais. Šią metodiką pailiustruosime plačiai taikomai Kranko-Nikolsono skirtuminei schemai.

KONVERGAVIMAS IR STABILUMAS

Sakykime $\Omega = \{x : 0 < x_i < 1,\ i = 1, ..., n\}$ yra n-matis vienetinis kubas R^n, $\partial\Omega$ – srities kraštas, $Q = (0, T] \times \Omega$. Pagrindinius rezultatus suformuluosime antram kraštiniam uždaviniui netiesinių lygčių sistemai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + F(u), \qquad (t, x) \in Q, \tag{3}$$

$$u(0,x) = u^{(0)}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = 0, \qquad (t,x) \in (0,T] \times \partial\Omega \tag{5}$$

Čia A_j – diagonalinė matrica su kompleksiniais koeficientais. Jei matricos A_j koeficientai yra menami skaičiai, gausime Šredingerio tipo lygtis, jei kompleksiniai – Kuramoto-Cuzuki, jei realūs – reakcijos-difuzijos lygtis. Pastebėsime, kad dėl matricų A_j diagonalumo šio uždavinio tyrimas iš esmės nesiskiria nuo uždavinio su viena lygtimi. Todėl ateityje apsiribosime viena lygtimi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(u), \qquad (t,x) \in Q, \tag{6}$$

$$u(0,x) = u^{(0)}(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = 0, \qquad (t,x) \in (0,T] \times \partial\Omega, \tag{8}$$

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$

čia a_j – menami skaičiai.

Daugumoje uždavinių [1–8] funkcija $f(u)$ yra polinomas. Todėl ateityje laikysime, kad funkcija $f(u)$ yra polinomas.

Uždavinį (6) – (8) pakeisime skirtumine Kranko-Nikolsono schema su svoriais

$$p_t = L_h p^{(\sigma)} + g(p, \hat{p}), \qquad (t,x) \in Q_h, \tag{9}$$

$$p(0,x) = u^{(0)}(x), \qquad x \in \overline{\Omega}_h, \tag{10}$$

$$l_h p^{(\sigma)} = 0, \qquad (t,x) \in \omega_\tau \times \partial\Omega_h, \tag{11}$$

čia

$$L_h p = \sum_{j=1}^{n} a_j p_{\bar{x}_j x_j},$$

$$l_h p^{(\sigma)} = p_{x_k}^{(\sigma)} - \frac{h}{2a_k} \left(p_t - \sum_{j=1, j \neq k}^{n} a_j p_{\bar{x}_j x_j}^{(\sigma)} - g(p, \hat{p}) \right).$$

Tarsime, kad

a) $0.5 \leq \sigma \leq 1$.

Funkcija $g(p, \hat{p})$ yra kintamųjų p, $\hat{p}$ polinomas. Paprasčiausiu atveju galima imti $g(p, \hat{p}) = f(p^\sigma)$.

Suformuluosime esminį teiginį skirtuminės schemos išsprendžiamui.

Teorema 1. *Sakykime išpildyta sąlyga* a), *egzistuoja uždavinio* (6) – (8) *sprendinys*

$$p \in W_2^l(\Omega_h) \cap C^j(Q_h), \qquad j = [n - 1/2].$$

Tada egzistuoja tokia konstanta $\tau_0 \geq 0$, *kad kai* $\tau \leq \tau_0$ *galioja įvertis*

$$\|p(t)\|_{W_2^l(\Omega_h)} \leq c\, \|p(0)\|_{W_2^l(\Omega_h)}, \qquad t \in \overline{\Omega}_\tau,$$

čia dydis

$$c = c\,(\|p\|_{C^j(Q_h)}, \|p(0)\|_{W_2^{l-1}(\Omega_h)}, T, n, l).$$

Suformuluosime teiginį apie skirtuminės schemos konvergavimą.

TEOREMA 2. *Sakykime išpildyta sąlyga* a), $r = 2(l-s)(1-\alpha) - 1 > 0$, $1 > \alpha > (n-1)/n$. *Tada egzistuoja tokios konstantos* $\tau_0, h_0 > 0$, *kad kai* $\tau \le \tau_0$, $h \le h_0$, *egzistuoja vienintelis uždavinio* (9) – (11) *sprendinys, konverguojantis į uždavinio* (6) – (8) *sprendinį ir galioja įverčiai*

$$\|u(t) - p(t)\|_{W_2^s(\Omega_h)} \le c \max_{\omega_\tau} \|\Phi(t)\|_{W_2^s(\Omega_h)}$$

$$\|u(t) - p(t)\|_{C_2^s(\Omega_h)} \le c \left(\max_{\omega_\tau} \|\Phi(t)\|_{W_2^s(\Omega_h)}\right)^\beta,$$

$$t \in \omega_\tau, \qquad s \le l - n/2, \qquad \beta = r/(r+1).$$

Čia $\Phi(t)$ – *aproksimacijos paklaida.*

Ištirsime stabilumą. Sakykime u_1, u_2 ir p_1, p_2 yra uždavinių (6) – (8) ir (9) – (11) sprendiniai su pradinėmis sąlygomis $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$.

TEOREMA 3. *Sakykime yra išpildytos* Teoremos 1 *sąlygos. Tada egzistuoja tokios konstantos* $\tau_0, h_0 > 0$, *kad kai* $\tau \le \tau_0$, $h \le h_0$ *galioja įvertis*

$$\|p_1(t) - p_2(t)\|_{L_2(\Omega_h)} \le c\,\|u_1(0) - u_2(0)\|_{L_2(\Omega_h)}, \qquad t \in \overline{\Omega}_\tau,$$

čia konstanta c *nepriklauso nuo* τ, h.

Šie rezultatai galioja Kuramoto-Cuzuki ir reakcijos-difuzijos lygtims. Taikant šią metodiką buvo pagrįsta skaidymo schema [28].

Literatūra

1. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. Е., *Введение в статистическую радиофизику и оптику,* Москва, Наука, 1981.

2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В., *Проблемы нелинейной оптики,* Москва, ВИНИТИ, 1964.

3. Шуберт М., Вильгельми Б., *Введение в нелинейную оптику,* Москва, Мир, 1964.

4. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П., *Теория волн,* Москва, Наука, 1979.

5. Сухоруков А. П., *Нелинейное волновое взаимодействие в оптике и радиофизике,* Москва, Наука, 1988.

6. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А., *Математическое моделирование в нелинейной оптике,* Москва, Изд-во Моск. ун-та, 1989.

7. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С., *Введение в синергетику,* Москва, Наука, 1990.

8. C. V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations,* New York, Plenum Press, 1992.

9. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., *Теория солитонов: метод обратной задачи,* Москва, Наука, 1980.

10. Тахаджян Л. А., Фадеев Л. Д., *Гамильтонов подход в теории солитонов,* Москва, Наука, 1986.

11. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving The Korteveg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett.* **19,** p. 1095–1097 (1967).

12. Самарский А. А., *Теория разностных схем,* Москва, Наука, 1989.

13. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностые методы для эллиптических уравнений,* Москва, Наука, 1976.

14. Самарский А. А., Гулин А. В., *Устойчивость разностных схем,* Москва, Наука, 1973.

15. Самарский А. А., Николаев Е. С., *Методы решения сеточных уравнений,* Москва, Наука, 1978.

16. Самарский А. А., Попов Ю. П., *Разностые методы решения задач газовой динамики,* Москва, Наука, 1980.

17. Марчук Г. И., *Методы вычислительной математики,* Новосибирск, Наука, 1977.

18. Марчук Г. И., *Методы расщепления,* Москва, Наука, 1988.

19. Яненко Н. Н., *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики,* Новосибирск, Наука, 1967.

20. J. A. Fleck, J. R. Morris, M. J. Feit, *Time-dependent Propagation of High Energy Laser Beams Through the Atmosphere, Applied Phys.* **10,** p. 129–160 (1976).

21. L. Wu, *DuFort-Frankel-type Methods for Linear and Nonlinear Schrödinger Equations, SIAM J. Numer. Anal.* **33**(4), p. 1526–1533 (1996).

22. W. Dai, *Absolute Stable Explicit and Semi-explicit Schemes for Schrödinger Equations, Math. Numer. Sinica* **11,** p. 128–131 (1989).

23. W. Dai, *An Unconditionally Stable Three-level Explicit Difference Schemes for the Schrödinger Equation With a Variable Coefficient, SIAM J. Numer. Anal.* **29,** p. 174–181 (1992).

24. Волков В. М., *Об одном адаптивном итерационном методе реализации неявных разностных схем для нелинейного многомерного уравнения Шредингера, Дифференциальные уравнения* **23**(7), с. 928–934 (1996).

25. Иванаускас Ф. Ф., *Сходимость и устойчивость разностных схем для нелинейных уравнений Шредингера, уравнения Курамото–Цузуки и систем типа реакция–диффузия, ДАН России* **337**(5), 122 (1994).

26. Иванаускас Ф. Ф., *О сходимости и устойчивости разностных схем для нелинейных уравнений Шредингера, уравнения Курамото–Цузуки и систем типа реакция–диффузия, Лит. матем. сб.* **34**(1), с. 32–51 (1994).

27. Иванаускас Ф. Ф., *Сходимость и устойчивость разностных схем для нелинейных уравнений шредингеровского типа, Лит. матем. сб.* **31**(4), с. 606–621 (1991).

28. Иванаускас Ф. Ф., *Метод расщепления для решения нелинейных уравнений шредингеровского типа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **29**(12), с. 1830–1838 (1989).