NETIESINIŲ SUŽADINIMŲ EVOLIUCIJA DISIPATYVIOSE SISTEMOSE
(Gunn'o bangų modelis)

Ričardas Bakanas
Puslaidininkių fizikos institutas, A. Goštauto 11, 2600 Vilnius

Solitonai ir kinkai – netiesinės sutelktos bangos konservatyviose sistemose buvo intensyviai teoriškai tyrinėjamos pastaruosius pora dešimtmečių, ir palyginus neblogai ištirtos [1–3]. Baziniai teoriniai modeliai – evoliucijos lygtys, sugrubintai (makroskopiškai) aprašančios šiuos sužadinimus, yra netiesinės dalinių išvestinių diferencialinės lygtys. Dėl nagrinėjamų sistemų konservatyvaus pobūdžio šios lygtys yra grįžtamos ir pasižymi aibe judėjimo integralų. Judėjimo integralai ir su jais susiję tvermės dėsniai gerokai palengvina evoliucijos lygčių nagrinėjimą. Netiesinių bangų atveju tai leido išvystyti analizinius evoliucijos lygčių sprendimo metodus ir jų pagalba aprašyti tiek laisvus (nesutrikdytus) netiesinius sužadinimus, tiek ir reguliarių bei atsitiktinių trikdžių įtaką šiems dariniams, t. y. dinamines ir stochastines jų savybes [1, 2].

Panašiais sužadinimais – netiesiniais lokalizuotais dariniais pasižymi ir nepusiausviros disipatyvios sistemos, sutinkamos fizikoje, biologijoje, ekologijoje, cheminių procesų kinetikoje ir pan. [4]. Evoliucijos lygtys, sugrubintai, apvidurkintai aprašančios šiuos darinius, yra makroskopinės kinetikos lygtys, pasižyminčios negrįžtamumu. Šios lygtys – baziniai "disipacinių struktūrų" teoriniai modeliai yra netiesinės parabolinio tipo diferencialinės lygtys (arba jų sistemos) [4]. Netiesinių disipacinių darinių savybės, tiek dinaminės, tiek ir stochastinės, yra palyginus prastai ištirtos dėl metodinių sunkumų, su kuriais susiduriama, bandant analiziniais metodais išvesti reikiamus evoliucijos lygčių sprendinius. Metodai, išvystyti netiesinių sutelktų bangų analizei konservatyviose sistemose, kaip taisyklė, čia netinka dėl nekonservatyvaus (disipatyvaus) nagrinėjamų sistemų pobūdžio. Dažniausiai yra apsiribojama arba pusiau kiekybine evoliucijos lygčių analize, arba taikomi skaitmeniniai metodai [4]. Suprantama, domintis bendromis netiesinių darinių savybėmis ir siekiant apibendrinančių išvadų, analiziniai metodai yra žymiai pranašesni. Taigi, reikalingi paprasti modeliai – modelinės evoliucijos lygtys, kurių pagalba pavyktų analiziškai aprašyti šiuos darinius, tiek laisvus, tiek ir sutrikdytus.

Gana paprastas disipatyvios sistemos modelis yra hidrodinaminis Gunn'o bangų (GB) modelis, aprašantis netiesines dviejų rūšių elektronines struktūras puslaidininkiuose, pasižyminčiuose N-tipo volt-amperine charakteristika $\nu(u)$: Gunn'o sluoksnius (GS) ir Gunn'o domenus (GD). GS pasižymi elektrinio lauko profiliu, būdingu kink-bangoms, o GD lauko profilis yra "solitoninio" tipo [5–7]. Nagrinėjant šį modelį – makroskopines GB evoliucijos lygtis mums pavyko pasiūlyti analizinius GB aprašymo metodus, kurie leidžia ištirti tiek laisvų, tiek ir sutrikdytų GB elgesį [8, 9].

Šiame pranešime yra aptariami analizinio GB aprašymo metodai ir jų taikymo galimybėms, nagrinėjant dinamines bei stochastines GB savybes. Pagrindinis dėmesys yra skiriamas trikdžių teorijai, aprašančiai silpnai sutrikdytų GB elgesį. pranešime yra atspindėti mūsų pastarojo meto tyrinėjimų rezultatai (žr. [6–10]). Pažymėsime, kad čia nagrinėjamas teorinis modelis yra įdomus ne vien puslaidininkių fizikos požiūriu: GB analizės metodai gali būti taikomi ir netiesinių tvarkos parametro darinių – vorteksų aprašymui superlaidininkuose bei silpno superlaidumo struktūrose – Josephson'o jungtyse [11, 12].

Hidrodinaminis GB modelis, vartojantis makroskopinį puslaidininkio elektroninės sistemos aprašymą, remiasi Poisson'o ir tolydumo lygtimis, kuriose yra atsižvelgta į tai, kad elektroninės sistemos atsakas į išorinį elektrinį lauką yra nusakomas N-tipo volt-amperine charakteristika $\nu = \nu(u)$ [5]. N-tipo priklausomybės $\nu(u)$ pasižymi neigiamu diferencialiniu laidumu – būtina netiesinių darinių, Gunn'o bangų, susidarymo sąlyga. Iš šių lygčių seka diferencialinė lygtis, aprašanti momentinį elektrinio lauko pasiskirstymą bandinyje, t. y. evoliucijos lygtis, aprašanti GB lauko pasiskirstymą laiko momentu [6, 7],

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \hat{\Lambda} u = \beta f(y,t). \tag{1}$$

Čia simbolis $\hat{\Lambda}$ žymi netiesinį operatorių

$$\hat{\Lambda} = -d\frac{\partial^2}{\partial y^2} + p(\cdot)\frac{\partial}{\partial y} + r(\cdot), \tag{2}$$

kintamasis $y = x - c_0\, t$ reiškia bėgančią koordinatę, kur c_0 – laisvos (nesutrikdytos) GB greitis, o dydis $f(y,t)$ – trikdančioji "jėga" aprašo GB trikdžius. Formalus parametras β, $0 \le \beta \le 1$, nusako trikdančios jėgos $f(y,t)$ stiprį: silpnų trikdžių atveju turime $\beta \ll 1$. GB atveju trikdžiai yra sukeliami legiravimo nevienalytiškumų arba elektros srovės svyravimų bandinyje. Trikdančios jėgos $f(y,t)$ išraiškos yra gerai žinomos [6, 7, 8]. Funkcijos $p(u)$ ir $r(u)$, aprašančios netiesinį operatorių $\hat{\Lambda}$, išsireiškia per bandinio volt-amperinę priklausomybę $\nu(u)$ [6, 7],

$$p(u) = \nu(u) - c_0, \qquad r(u) = \nu(u) - J_0. \tag{3}$$

Čia J_0 žymi pilnos srovės tankį bandinyje laisvos GB atveju. Iš evoliucijos lygties (1) seka "skeletinė" lygtis, aprašanti laisvas GB,

$$\hat{\Lambda} u_0(y) = 0. \tag{4}$$

Iš šios lygties, naudojant modelines charakteristikas $\nu(u)$, yra randami skeletiniai sprendiniai $u_0(y)$ [6, 7]. Pastebėsime, kad aprašant GD, solitoninio tipo darinius, yra vartojamos "N-charakteristikos", pasižyminčios vienu ekstremumu (maksimumu), o norint aprašyti GS, kink'o tipo darinius, būtina naudoti N-charakteristikas, pasižyminčias dvejais ekstremumo taškais. Tai seka iš skeletinės lygties (4) fazinio portreto analizės.

Sutrikdytos GB yra aprašomos evoliucijos lygtimi (1). Bendru trikdančios jėgos $f(y,t)$ atveju analizinių šios lygties sprendimo metodų nėra žinoma. Nagrinėjant sutrikdytų GB elgesį, tenka apsiriboti silpnų trikdžių atveju ($\beta \ll 1$) ir taikyti trikdžių teorijos metodus. Standartiniai trikdžių teorijos metodai, kurie buvo taikyti GB sklaidos aprašymui [6, 7], yra labai riboti – jie tinka tik sutelktos trikdančios jėgos

$f(y,t)$ atvejais, t. y. kuomet $f(y,t) \neq 0$ tik pakankamai mažuose kintamųjų y ir t intervaluose [8]. Daugelyje praktiškai svarbių atvejų šie apribojimai nėra tenkinami.

"Universali" trikdžių teorija, leidžianti reikiamu tikslumu aprašyti sutrikdytų GB elgesį bendru silpnos trikdančios jėgos atveju, yra pasiūlyta mūsų darbuose [8, 9]. Ji leidžia aprašyti silpnų ($\beta \ll 1$) trikdžių įtaką abiejų tipų bangoms, GS ir GD, ir remiasi transliacinėmis operatoriaus $\hat{\Lambda}$ savybėmis [8, 9],

$$\hat{\Lambda} u_0(y) = \hat{\Lambda} u_0(y + \delta y). \tag{5}$$

Čia δy žymi nykstamai mažą koordinatės y poslinkį. Iš sąryšio (5), naudojantis skeletine lygtimi (4), seka transliacinės modos $\bar{Y}(y) \propto du_0(y)/dy$ egzistavimas:

$$\hat{L}\bar{Y}(y) = 0, \tag{6}$$

kur simbolis $\hat{L}$ reiškia tiesinį operatorių:

$$\begin{gathered} \hat{L} = -d\frac{d^2}{dy^2} + Q(y)\frac{d}{dy} + U(y), \\ Q(y) = p\left[u_0(y)\right], \qquad U(y) = p'(y)\frac{du_0(y)}{dy} + r'(y). \end{gathered} \tag{7}$$

Čia štricho ženklas žymi funkcijos išvestinę pagal u_0: $p'(y) = dp\left[u_0(y)\right]/du_0$ ir pan.

Sutrikdytos GB, atsižvelgiant į trikdžių silpnumą bei transliacinės modos egzistavimą, yra aprašomos sekančiu būdu [10]:

$$u(\xi, t) = u_0(\xi) + \Delta u(\xi, t), \qquad \Delta u \ll u_0, \tag{8}$$

kur $\xi = y + s(t)$, dydis $s(t)$ nusako GB "fazės postūmį", o funkcija $\Delta u(\xi, t)$ aprašo GB profilio deformacijas, sukeltus trikdančios jėgos f. "Papildomos" funkcijos $s(t)$ naudojimas išraiškoje (8) yra padiktuotas transliacinių nagrinėjamo uždavinio savybių. Toks sprendinio pavidalas turi aiškią fizikinę prasmę ir leidžia aprašyti sutrikdytų GB evoliuciją silpnos ir neribotai veikiančios jėgos $f(y,t)$ atvejais.

Iš lygties (1), naudojantis išraiška (8) bei lygtimi (4), yra išvedama linearizuota evoliucijos lygtis, aprašanti ieškomas funkcijas s ir Δu,

$$\frac{du_0(\xi)}{d\xi}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial \Delta u(\xi, t)}{\partial t} + \hat{L}\Delta u(\xi, t) = F(\Delta u, s, u_0, f), \tag{9}$$

kur dydis F žymi "pernormuotą jėgą", įskaitančią evoliucijos lygties (1) netiesiškumus [8, 9]. Suprantama, kad čia nagrinėjamu atveju $\beta \ll 1$, funkcijos $s(t)$, $\Delta u(\xi, t)$, $F(\xi, t)$ gali būti norimu tikslumu aprašytos, dėstant jas mažo parametro β laipsnių eilute

$$\phi(\xi, t) = \sum_{n=1} \beta^n \phi^{(n)}(\xi, t), \qquad \phi = s, \Delta u, F. \tag{10}$$

Tolesnis sutrikdyto sprendinio ieškojimas, t. y. funcijų $s^{(n)}(t)$ ir $\Delta u^{(n)}(\xi, t)$ radimas, yra susijęs su evoliucijos lygties (9) sprendimu, atvaizduojant ją operatoriaus $\hat{L}$ tikrinių funkcijų Y_α bazėje. Akivaizdu, kad lygties (9) "L-atvaizdą" atitinka paprasta diferencialinė lygtis, kuri gali būti lengvai išspręsta, atsižvelgus į tai, kad transliacinės modos indėlis į sutrikdytą sprendinį $u(\xi, t)$ yra tiesiog susijęs su GB fazės postūmiais $s(t)$ [8]. Daugiau nebesigilindami į evoliucijos lygties (9) sprendimo detales, pateikiame galutinį rezultatą:

$$
\begin{aligned}
s^{(n)}(t) &= \left\langle \bar{Y} | \frac{du_0}{d\xi} \right\rangle^{-1} \int_0^t \bar{F}^{(n)}(\tau)\, d\tau, \qquad F^{(n)}(\xi, t) = \sum_{\alpha} F_{\alpha}^{(n)}(t) Y_{\alpha}(\xi), \\
\Delta u^{(n)}(\xi, t) &= {\sum_{\alpha}}' T_{\alpha}^{(n)}(t) Y_{\alpha}(\xi), \qquad T_{\alpha}^{(n)}(t) = \int_0^t F_{\alpha}^{(n)}(\tau) e^{\lambda_{\alpha}(\tau - t)}\, d\tau,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

kur

$$
F_{\alpha}^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F^{(n)}(\xi, t) Y_{\alpha}^{+}(\xi)\, d\xi, \tag{12}
$$

funkcijos $Y_{\alpha}^{+}(\xi)$ yra tikrinės sujungtinio operatoriaus

$$
\hat{L}^{+} = -d \frac{d^2}{dy^2} - Q(y) \frac{d}{dy} + U(y) \tag{13}
$$

funkcijos, o brūkšniu yra pažymėti dydžiai, betarpiškai susiję su transliacine moda $\bar{Y}(\xi)$. Sumos ženklas $\sum$ išraiškose (11) žymi sumavimą pagal diskretines bei integravimą pagal tolydines operatoriaus $\hat{L}$ tikrines vertes, o ženklas $\sum'$ reiškia, kad transliacinės modos indėlis šioje sumojje nėra įskaitytas. Išraiškos (8), (10), (11) yra pagrindiniai trikdžių teorijos sąryšiai, leidžiantys norimu tikslumu aprašyti evoliucijos lygties (1) sprendinius, o tuo pačiu sutrikdytų GB elgesį.

Čia aptarta trikdžių teorija buvo taikoma dinaminėms bei stochastinėms GS-bangų savybėms nagrinėti, įvairiais trikdančios jėgos $f(y, t)$ atvejais (žr. [10]). Gauti rezultatai liečia dviejų rūšių GS: praturtinto krūvio Gunn'o sluoksnius (pGS), pasižyminčius kink-bangos profiliu bei nuskurdinto krūvio Gunn'o sluoksnius (nGS), pasižyminčius antikink'o profiliu. Nesant galimybių čia plačiau aptarti gautus rezultatus, pažymėsime, kad buvo išnagrinėti GS "sklaidos" uždaviniai, t. y. pGS ir nGS sklidimas lokalizuotos elektriškai užkrautų priemaišų sankaupos aplinkoje [6], buvo tyrinėtos "dinaminės" GS savybės, t. y. reguliarių elektros srovės svyravimų įtaka GS sklidimui [8], o taip pat dalinai yra ištirtos ir stochastinės GS savybės, o būtent, atsitiktinių srovės svyravimų (triukšmo) įtaka GS [9, 13]. Antrojo tipo darinių, Gunn'o domenų, atveju yra tyrinėta tik jų sklaidos lokalizuotų priemaišų centrų evoliucija [7]. Visi šie rezultatai yra išsamiau aprašyti apžvalginiame straipsnyje [10].

Literatūra

1. F. G. Bass, Yu. S. Kivshar, V. V. Konotop, Yu. A. Sinitsyn, *Phys. Rep.* **157**, 63 (1988).

2. Yu. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763 (1989).

3. S. A. Gredeskul, Y. S. Kivshar, *Phys. Rep.* **216**, 1 (1992).

4. Кернер Б. С., Осипов В. В., *Автосолитоны,* Москва, Наука, 1991.

5. M. Shur, *GaAs Devices and Circuits,* New York, London, Plenum Press, 1985.

6. R. Bakanas, F. G. Bass, V. V. Konotop, *Phys. Status Solidi* (a) **112**, 579 (1989).

7. R. Bakanas, *Phys. Status Solidi* (a) **128**, 473 (1991).

8. R. Bakanas, *Liet. fiz. žurn.* **35**, 239 (1995).

9. F. G. Bass, R. Bakanas, *Phys. Lett.* A **214**, 301 (1996).

10. F. G. Bass, R. Bakanas, *Liet. fiz. žurn.* **36**, 566 (1996).

11. R. P. Huebener, *Magnetic flux structures in superconductors,* Springer-Verlag, Berlin-NY, 1979.

12. I. Aranson, M. Gitterman, B. Ya. Shapiro, *Phys. Rev.* B **51**, 878 (1995).

13. R. Bakanas, *Phys. Status Solidi* (a) **153**, 153 (1996).