*LMD mokslo darbai*, 433–437
1998, Vilnius

# Diskrečiojo apibendrintojo Mayerio funkcionalo antrosios variacijos problema

**N. Janušauskaitė (KTU)**

Nagrinėsime apibendrintojo Mayerio funkcionalo, priklausančio nuo trajektorijos tarpinių būsenų, minimizavimo uždavinį. Baigtinių pokyčių metodu sudarysime tikslo funkcionalo antrąją variaciją ir panagrinėsime jos savybes, kai valdymas tenkina diskretųjį maksimumo principą.

Tarkime, kad $V \subset R^m$ – aprėžtoji Borelio aibė. Leistinu valdymu vadinsime atkarpomis tolydžiąją ir tolydžiąją iš dešinės funkciją $u:[t_0;t_1] \to U$. Sakykime, kad funkcija $f = f(x,u,\sigma): \boldsymbol{R}^n \times U \times [t_0;t_1] \to R$ yra aprėžta, tolydi $x$ atžvilgiu ir atkarpomis tolydi $\sigma$ atžvilgiu kartu su dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$, skaliarinė funkcija $\varphi = \varphi(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(h)})$ – tolydi visų savo kintamųjų atžvilgiu kartu su dalinėmis išvestinėmis

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^{(l)}}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^{(l)2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{(l)} \partial x_j^{(k)}}, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, l = \overline{1,h}, k = \overline{1,h}; h > 0.$$

Nagrinėsime uždavinį:

$$I(u) = \varphi(x(t_1), x(t_1 - 1), \dots, x(t_1 - h)) \to \min_u, \tag{1}$$

$$x(t+1) = \int_t^{t+1} f(x(t), u(\sigma), \sigma) d\sigma, \; t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t) \equiv 0, \text{ kai } t < t_0. \tag{3}$$

Sakykime, kad $u(\sigma), \bar{u}(\sigma) = u(\sigma) + \Delta u(\sigma)$, $\sigma \in [t, t+1), t \in T$ – leistini valdymai, o atitinkančios šiuos valdymus trajektorijos yra $x(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$.

Rasime (1) funkcionalo pokytį, atitinkantį valdymo pokytį $\Delta u$ :

$$\Delta I(u) = I(\overline{u}) - I(u) = \frac{\partial \varphi^T\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1) + \sum_{s=-h}^{-1} \frac{\partial \varphi^T\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x^{(s)}}\Delta x(t_1 + s) +$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x^T(t_1)\frac{\partial^2 \varphi\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1) + \Delta x^T(t_1)\sum_{s=-h}^{-1}\frac{\partial^2 \varphi\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x \partial x^{(s)}}\Delta x(t_1 + s) + \tag{4}$$
$$+\sum_{s=-h}^{-1}\sum_{r=-h}^{-1}\Delta x^T(t_1 + s)\frac{\partial^2 \varphi\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x^{(s)}\partial x^{(r)}}\Delta x(t_1 + r) + 0\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2 + \left\|\Delta\tilde{x}(t_1)\right\|\cdot\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right);$$

čia $\tilde{x}(t_1) = \left\{x(t_1 - 1), x(t_1 - 2), \ldots, x(t_1 - h)\right\}$, kiekvienas vektorius užrašytas stulpeliu, o raide T – pažymėta transponavimo operacija. Bet kokiems vektoriams $\psi(t)$, $\psi(t, s)$, $\Delta x(t)$, $t \in T$, $s = \{-1, -2, \ldots, -h\}$, $\Delta x(t_0) = 0$, teisingos tapatybės:

$$-\psi^T(t_1 - 1)\Delta x(t_1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(\psi^T(t-1)\Delta x(t) - \psi^T(t)\Delta x(t+1)\right), \tag{5}$$

$$-\psi^T(t_1 - 1)\Delta x(t_1 + s) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(\psi^T(t-1, s)\Delta x(t+s) - \psi^T(t, s)\Delta x(t+s+1)\right). \tag{6}$$

Pažymėkime

$$\psi_1(t_1 - 1) = \frac{\partial \varphi\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\psi(t_1 - 1, s) = -\frac{\partial \varphi\left(x(t_1), \tilde{x}(t_1)\right)}{\partial x^{(s)}}, \quad s = -h, -h+1, \ldots, -1, \tag{8}$$

$$H\left(x(t), \psi(t), u(\sigma), \sigma\right) = \psi^T(t) f\left(x(t), u(\sigma), \sigma\right) = H[t, \sigma], \tag{9}$$

$$\Delta x(t) = \varepsilon \delta x(t), \ \Delta u(\sigma) = \varepsilon \delta u(\sigma), \ \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Įrašę (5)–(10) formules į pokyčio (4) formulę, po tam tikrų pertvarkymų, gauname:

$$\Delta I(u) = \varepsilon \delta I(u) + \varepsilon^2 \delta^2 I(u) + 0\left(\varepsilon^2\right); \tag{11}$$

čia

$$\delta I(u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\int_t^{t+1}\frac{\partial H^T[t, \sigma]}{\partial u}u(\sigma)d\sigma, \tag{12}$$

pirmoji funkcionalo variacija, o

$$\delta^2 I(u) = \frac{1}{2} x^T(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1), \tilde{x}(t_1))}{\partial x^2} x(t_1) + x^T(t_1) \sum_{s=-h}^{-1} \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1), \tilde{x}(t_1))}{\partial x \partial x^{(s)}} x(t_1 + s) +$$
$$+ \sum_{s=-h}^{-1} \sum_{r=-h}^{-1} x^T(t_1 + s) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1), \tilde{x}(t_1))}{\partial x^{(s)} \partial x^{(r)}} x(t_1 + r) - \tag{13}$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ x^T(t) \int_t^{t+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H[t,\sigma]}{\partial x^2} x(t) + \frac{\partial H[t,\sigma]}{\partial x \partial u} u(\sigma) \right) d\sigma + \frac{1}{2} \int_t^{t+1} u^T(\sigma) \frac{\partial^2 H[t,\sigma]}{\partial u^2} u(\sigma) d\sigma \right]$$

antroji (1) funkcionalo variacija.

Tarkime $u^{\circ}(\sigma)$, $\sigma \in [t, t+1)$, $t \in T$ yra (1) – (3) uždavinio optimalusis valdymas, o $x^{\circ}(t)$ jį atitinkanti trajektorija.

**Apibrėžimas.** Funkcionalo antrąją variaciją $\delta^2 I(u^{\circ})$ vadinsime silpnai teigiama, jei egzistuoja teigiamas skaičius $\alpha$, kad su kiekvienu leistinu valdymu teisinga nelygybė:

$$\delta^2 I(u^{\circ}) \geq \alpha \|u(\cdot)\|, \quad \|u(\cdot)\| = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\sigma) \cdot u(\sigma) d\sigma .$$

1 TEOREMA. *Jei* $u^{\circ}(\sigma), \sigma \in [t, t+1), t \in T$ *yra lokaliai optimalusis* (1)–(3) *uždavinio valdymas, tai pirmoji variacija lygi nuliui, t.y.* $\delta I(u^{\circ}) = 0$.

**Įrodymas**. Pastebėsime, kad teiginys $\delta I(u^{\circ}) = 0$ yra ekvivalentus diskrečiojo maksimumo principo sąlygai:

$$H(x^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t), u^{\circ}(\sigma), \sigma) = \max_{u \in U} H(x^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t), u, \sigma)\, \sigma \in [t, t+1), \, t \in T ,$$

kai jungtiniai kintamieji tinka lygtims:

$$\psi(t-1) = \int_t^{t+1} \frac{\partial H[t,\sigma]}{\partial x} d\sigma + \psi(t,-1) - \psi(t+h-1,-h), \; t \in T, \; \psi(t-1,s) = \psi(t,s-1)$$

su kraštinėmis (7) ir (8) sąlygomis. Diskrečiojo maksimumo principas (1)–(3) uždaviniui įrodomas panašiai kaip [1] darbe.

2 TEOREMA. *Jei antroji funkcionalo variacija* $\sigma^2 I(u^{\circ})$ *silpnai teigiama, tai* $u^{\circ}(\sigma), \sigma \in [t, t+1), t \in T$ *yra lokaliai optimalusis* (1)–(3) *uždavinio valdymas*.

**Įrodymas**. Remdamiesi sąlyga $\delta I(u^{\circ}) = 0$ ir antrosios variacijos silpnojo teigiamumo apibrėžimu iš (11) lygybės gauname:

$$\Delta I(u^{\circ}) \geq \varepsilon^2 \left( \alpha \|u(\bullet)\|^2 + \frac{0(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right). \tag{14}$$

Kadangi $\alpha > 0$, o $\varepsilon$ galime parinkti pakankamai mažą skaičių, tai iš (14) nelygybės išplaukia $\Delta I\left(u^{\circ}\right) \geq 0$. Pastaroji nelygybė parodo, kad $u^{\circ}(\sigma)$ – lokaliai optimalusis valdymas.

Pastebėsime, kad pakankamas antrosios variacijos silpnojo teigiamumo sąlygas galima susieti su tam tikrų Rikačio tipo lygčių sistemos sprendinio egzistavimu.

3 TEOREMA. *Kad antroji funkcionalo variacija būtų silpnai teigiama, pakankama sąlyga yra matricinių Rikačio tipo lygčių sistemos*:

$$L_1(t) = Q_0(t) + A_0^T(t)L_1(t+1)A_0(t) + A_0^T(t)L_2(t+1,-1) + L_2^T(t+1,-1)A_0(t) -$$

$$-\int_t^{t+1}\left[Q_1(t,\sigma) + A_0^T(t)L_1(t+1)B_0(t,\sigma) + B_0^T(t,\sigma)L_1(t+1)A_0(t) + L_2^T(t+1,-1)B_0(t,\sigma)\right]^T R(t,\sigma)\times$$

$$\times\left[Q_1(t,\sigma) + A_0^T(t)L_1(t+1)B_0(t,\sigma) + B_0^T(t,\sigma)L_1(t+1)A_0(t) + L_2^T(t+1,-1)B_0(t,\sigma)\right]d\sigma, L_1(t) > 0.$$

$$L_2(t,s) = A_0^T(t)L_2(t+1,s-1) + L_3(t+1,-1,s-1) - \frac{1}{2}\int_t^{t+1}\left[Q_1(t,\sigma) + A_0^T(t)L_1(t+1)B_0(t,\sigma)\times\right.$$

$$\left.\times B_0^T(t,\sigma)L_1(t+1)A_0(t) + L_2^T(t+1,-1)B_0(t,\sigma)\right]\cdot R^{-1}(t,\sigma)\times B_0^T(t,\sigma)L_2(t+1,s-1)d\sigma,$$

$$L_3(t,s,r) = -\int_t^{t+1} L_2^T(t+1,s-1)B_0(t,\sigma)R^{-1}(t,\sigma)B_0^T(t,\sigma)L_2(t+1,s-1)d\sigma + L_3(t+1,s-1,r-1),$$

*su kraštinėmis sąlygomis*

$$L_1(t_1) = M_1(t_1),$$
$$L_2(t_1,s) = M_2(t_1,s), L_2(t,-h-1) = 0,$$
$$L_3(t_1,s,r) = M_3(t_1,s,r), L_3(t,s,-h-1) = 0$$

*sprendinio egzistavimas; čia*

$$A_0(t) = \int_t^{t+1}\frac{\partial f}{\partial x}d\sigma; B_0(t,\sigma) = \frac{\partial f}{\partial u}; M_1(t_1) = \frac{\partial^2\varphi\left(x^0(t_1), \tilde{x}^0(t_1)\right)}{\partial x^2};$$

$$M_2(t_1,s) = \frac{\partial^2\varphi\left(x^0(t_1), \tilde{x}^0(t_1)\right)}{\partial x\partial x^{(s)}}; M_3(t_1,s,r) = \frac{\partial^2\varphi\left(x^0(t_1), \tilde{x}^0(t_1)\right)}{\partial x^{(s)}\partial x^{(r)}};$$

$$Q_0(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_t^{t+1} H[t,\sigma]d\sigma; Q_1(t,\sigma) = -\frac{\partial H[t,\sigma]}{\partial x\partial u};$$

$$R(t,\sigma) = -\frac{\partial^2 H[t,\sigma]}{\partial u^2} > 0.$$

3 teoremos įrodymas remiasi tuo faktu, kad antrąją funkcionalo variaciją galime išreikšti kvadratine forma, kuri teigiamai apibrėžta, kai išpildytos teoremos sąlygos.

## LITERATŪRA

[1] N. Janušauskaitė. Diskretusis maksimumo principas Bolco uždaviniui su paskirstytu valdymu, *Liet. Matem. Rink.*, 36, №1, 1996, p. 21–26.

**The problem of the second variation of the discrete generalized Mayer form's functional**

*N. Janušauskaitė*

The second variation of Mayer form`s functional with distributed control is investigated.