LMD mokslo darbai, 89–95
1998, Vilnius

Modelis "Policininkai ir vagys"

G.Felinskas (ŠU, informatikos katedra)

1. Vienas žinomiausių sąveikaujančių dalelių sistemų teorijos modelių yra *draudimų procesas* (DP) (*exclusion process*), žiūr. Liggett [1].

Šį procesą galima apibūdinti taip: kiekviename periodinės gardelės Z_N mazge $x=1,.., N$ gali būti vienos rūšies dalelė ir ne daugiau, kaip viena ($\eta(x)=1$ arba $\eta(x)=0$), dalelės laikui bėgant atsitiktinai juda. Mazge x esanti dalelė per trumpą laiko tarpą Δt arba nepajuda, arba nepriklausomai nuo kitų dalelių peršoka į vieną iš kaimyninių mazgų $x+1$ arba $x-1$ su atitinkamomis tikimybėmis $\lambda_+\Delta t+o(\Delta t)$, $\lambda_-\Delta t+o(\Delta t)$, jei atitinkamas mazgas "tuščias". Priešingu atveju šuolis neįvyksta. Skaičiai λ_+ ir λ_- yra DP parametrai (perėjimo greičiai), charakterizuojantys dalelių judėjimo greitį. Matematiškai, dalelių sistemos evoliucija yra *Markovo procesas*

$$\eta_t=(\eta_t(x),\ x\in Z_N),\ \ t\geq 0.$$

Tikimybių skirstinys, kai kiekviename mazge x tikimybė rasti dalelę nepriklauso nuo dalelių buvimo ar nebuvimo kituose mazguose ir yra lygi kažkokiam skaičiui $0<\rho<1$, vadinamas Bernulio matu su parametru ρ:

$$P_\rho(\eta(x),\ x\in Z)=(1-\rho)^N\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\sum_{x=1}^N \eta(x)}, \text{ čia } N-\text{mazgų skaičius.}$$

Apibrėžimas. Tegul η_t, $t\geq 0$ – Markovo procesas, priimantis reikšmes iš baigtinės aibės χ. Tikimybių skirstinys $P(\eta)$ aibėje χ vadinamas *invariantiniu*, jei visiems $t\geq 0$ galioja lygybė $P(\eta_t)=P(\eta_0)$. Kitaip tariant, kiekvienu laiko momentu $t\geq 0$ proceso skirstinys sutampa su jo skirstiniu laiko momentu $t=0$.

Yra žinoma, kad DP turi be galo daug *Bernulio* invariantinių matų ("pusiausvyros stovių"), kurie vienas nuo kito skiriasi dalelių tankiu ρ.

2. Šiame darbe nagrinėjamas naujas DP tipo modelis su dviejų rūšių dalelėmis, pavadintas "*Policininkų ir vagių procesu*" (PVP). Šiame modelyje kiekviename gardelės Z_N mazge x gali būti ne daugiau, kaip viena vienos rūšies dalelė – "vagis" (žym. $\xi(x)=1$ arba $\xi(x)=0$) ir ne daugiau, kaip viena kitos rūšies dalelė – "policininkas" (žym. $\eta(x)=1$ arba $\eta(x)=0$).

Įsivaizduokime, kad kiekvienas "vagis" ir "policininkas" turi kišenėse po 2 "žadintuvus" – kairįjį ir dešinįjį. "Žadintuvai" suskamba praėjus laiko momentui τ, kuris yra atsitiktinis ir pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su parametru $\lambda > 0$:

$$P\{\tau \le s\} = 1 - e^{-\lambda s}.$$

"Žadintuvų" parametrai apskritai gali būti skirtingi. Suskambus atitinkamam "žadintuvui", "vagis" pereina į vieną iš gretimų mazgų x - 1 arba x + 1, jei ten neužimta kito "vagies" ir jei senoje vietoje yra "policininkas" (kitaip sakant, "vagis" bėga nuo "policininko"). Analogiškai elgiasi "policininkai": suskambus atitinkamam "žadintuvui", jis pereina į vieną iš gretimų mazgų x - 1 arba x + 1, jei ten nėra kito "policininko" ir jei senoje vietoje nėra "vagies" (kitaip tariant, stengiasi pagauti). Neįvykus šuoliui, "žadintuvas" užvedamas iš naujo.

Matematiškai baigtinis PVP apibrėžiamas kaip *Markovo procesas* (ξ_t, η_t), $t \ge 0$ su būsenų (konfigūracijų) aibe χ_N, kurią sudaro sekos

$$(\xi,\eta) = \{(\xi(x),\eta(x)),\ x \in Z_N\},\ \text{čia}\ \xi(x) = 0,1,\quad \eta(x) = 0,1.$$

N-asis ir 1-asis mazgai – gretimi (visi mazgai išdėstyti ant apskritimo).

Kiekvienai konfigūracijai $(\xi,\eta) = \{(\xi(z),\eta(z)),\ z \in Z_N\}$ ir bet kuriems gretimiems mazgams $x, y \in Z_N$, $|x - y| = 1$, apibrėžiama nauja konfigūracija (konfigūracija, įvykus dalelės šuoliui į dešinę arba į kairę): $(\xi^{x,y},\eta) = \{(\xi^{x,y}(z),\eta(z)), z \in Z_N\}$, čia

$$\xi^{x,y}(z) = \begin{cases} \xi(y), & \text{jei } z = x, \\ \xi(x), & \text{jei } z = y, \\ \xi(z), & \text{jei } z \ne x, y \end{cases}$$

Analogiškai apibrėžiame konfigūraciją $(\xi,\eta^{x,y})$.

PVP evoliuciją nusako generatorius:

$$Lf(\xi,\eta) = \sum_{x=1}^{N}[f(\xi^{x,x+1},\eta) - f(\xi,\eta)]\xi(x)(1-\xi(x+1))\lambda_\xi^{+}\eta(x)$$

$$+\sum_{x=1}^{N}[f(\xi^{x,x-1},\eta) - f(\xi,\eta)]\xi(x)(1-\xi(x-1))\lambda_\xi^{-}\eta(x)$$

$$+\sum_{x=1}^{N}[f(\xi,\eta^{x,x+1}) - f(\xi,\eta)]\eta(x)(1-\eta(x+1))\lambda_\eta^{+}(1-\xi(x))$$

$$+\sum_{x=1}^{N}[f(\xi,\eta^{x,x-1})-f(\xi,\eta)]\eta(x)(1-\eta(x-1))\lambda_{\eta}^{-}(1-\xi(x)).$$

Modelį aprašo 4 parametrai $\lambda_{\xi}^{\pm}$, $\lambda_{\eta}^{\pm}\geq 0$, kurie gali būti susieti lygtimis. Tų lygčių pasirinkimą apsprendžia mūsų noras, kad modelio invariantiniai matai būtų Bernulio matai. Remiamasi žinomu invariantiškumo *kriterijumi*:

Tikimybių skirstinys $P(\xi,\eta)$ yra invariantinis tada ir tik tada, jei bet kokiai funkcijai $f(\xi,\eta)$ teisinga lygybė:

$$\sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} Lf(\xi,\eta)P(\xi,\eta)=0.$$

TEOREMA. *Nepriklausomas tikimybių skirstinys (Bernulio)*

$$P(\xi,\eta)=a_0^N a_1^{\sum_{z=1}^{N}\xi(z)} a_2^{\sum_{z=1}^{N}\eta(z)} a_{12}^{\sum_{z=1}^{N}\xi(z)\eta(z)},$$

$$a_0=\rho_{00},\quad a_1=\frac{\rho_{01}}{\rho_{00}},\quad a_2=\frac{\rho_{10}}{\rho_{00}},\quad a_{12}=\frac{\rho_{00}\rho_{11}}{\rho_{01}\rho_{10}},$$

čia $\rho_{00},\rho_{01},\rho_{10},\rho_{11}$ *- tikimybės rasti mazge atitinkamą dviejų dalelių kombinaciją,* $\rho_{00}+\rho_{01}+\rho_{10}+\rho_{11}=1$ *yra invariantinis PVP matas tada ir tik tada, jei parametrai* $\lambda_{\xi}^{\pm}$, $\lambda_{\eta}^{\pm}$, $a_{12}=\dfrac{\rho_{00}\rho_{11}}{\rho_{01}\rho_{10}}$ *tenkina sąlygas:*

(1) $\lambda_{\xi}^{+}=\lambda_{\xi}^{-}\equiv\lambda_{\xi}$, $\lambda_{\eta}^{+}=\lambda_{\eta}^{-}\equiv\lambda_{\eta}$, $a_{12}=\frac{\lambda_{\eta}}{\lambda_{\xi}}$, *arba*

(2) $\lambda_{\xi}^{+}=\lambda_{\eta}^{-}$, $\lambda_{\xi}^{-}=\lambda_{\eta}^{+}$, $a_{12}=1$.

Įrodymas. (1) atveju dalelių sistemos generatorius apibrėžiamas:

$$Lf(\xi,\eta)=\lambda_{\xi}\sum_{|x-y|=1}^{N}[f(\xi^{x,y},\eta)-f(\xi,\eta)]\xi(x)(1-\xi(y))\eta(x)$$

$$+\lambda_{\eta}\sum_{|x-y|=1}^{N}[f(\xi,\eta^{x,y})-f(\xi,\eta)]\eta(x)(1-\eta(y))(1-\xi(x)).$$

Užrašykime $\sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} Lf(\xi,\eta)P(\xi,\eta)=\lambda_{\xi}I_1+\lambda_{\eta}I_2$, kur

$$I_1 = \sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} \sum_{|x-y|=1}^{N} [f(\xi^{x,y},\eta) - f(\xi,\eta)]\xi(x)(1-\xi(y))\eta(x)P(\xi,\eta),$$

$$I_2 = \sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} \sum_{|x-y|=1}^{N} [f(\xi,\eta^{x,y}) - f(\xi,\eta)]\eta(x)(1-\eta(y))(1-\xi(x))P(\xi,\eta)$$

ir parodykime, kad $\lambda_\xi I_1 + \lambda_\eta I_2 = 0$ (invariantiškumo kriterijus). Perrašydami I_1, atskirai galime išskirti atvejus, kai "bėganti" nuo "policininko" dalelė "vagis" patenka į mazgą, kuriame yra kitas "policininkas" ir kai šiame mazge "policininko" nėra (pirmu atveju mazgų, kuriuose yra abiejų tipų dalelės, skaičius išlieka toks pat, antru atveju - sumažėja vienu). Taip perrašius, I_1 išraišką sudarytų 8 sumos (4 iš jų su minuso ženklu). Įvedę savitus pažymėjimus, gauname, kad

$$I_1 = J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,0}{1\,1}) + J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,0}{1\,0}) + J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{0\,1}{1\,1}) + J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{0\,1}{0\,1}) - J(f, \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,0}{1\,1}) - J(f, \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,0}{1\,0}) - J(f, \genfrac{}{}{0pt}{}{0\,1}{1\,1}) - J(f, \genfrac{}{}{0pt}{}{0\,1}{0\,1}),$$

kur

$$J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,0}{1\,1}) = \sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{N} f(\xi^{x,x+1},\eta)\xi(x)(1-\xi(x+1))\eta(x)\eta(x+1)P(\xi,\eta)$$

atspindi situaciją, kai į dešinę "bėganti" nuo "policininko" dalelė "vagis" patenka į mazgą, kuriame yra kitas "policininkas", o kiti pažymėjimai $J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}), J(f, \genfrac{}{}{0pt}{}{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot})$ traktuojami analogiškai. Pastebime, kad

$$J(f_1^{\cdots}, \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,0}{1\,1}) = \sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{N} f(\xi^{x,x+1},\eta)\xi(x)(1-\xi(x+1))\eta(x)\eta(x+1) a_1^{\sum\xi(z)} a_2^{\sum\eta(z)} a_{12}^{\sum\xi(z)\eta(z)}$$

$$= \sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{N} f(\xi,\eta)\xi(x+1)(1-\xi(x))\eta(x)\eta(x+1) a_1^{\sum\xi(z)} a_2^{\sum\eta(z)} a_{12}^{\sum\xi(z)\eta(z)} \equiv J(f, \genfrac{}{}{0pt}{}{0\,1}{1\,1}).$$

Iš tikrųjų, ši lygybė gaunama pakeitus kintamuosius. T.y., fiksavus x, $x+1$, įvedam naujus kintamuosius $\tilde{\xi}(x+1) = \xi(x)$, $\tilde{\xi}(x) = \xi(x+1)$, $\tilde{\xi}(z) = \xi(z)$, kai $z \neq x, x+1$, $z = 1,\dots,N$ ir sumą $\sum_{x=1}^{N}\sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N}$ pakeičiam suma $\sum_{x=1}^{N}\sum_{(\tilde{\xi},\eta)\in\chi_N}$, pasinaudodami lygybėmis $\sum_{x=1}^{N}\tilde{\xi}(x) = \sum_{x=1}^{N}\xi(x)$ bei

$$\sum_{x=1}^{N}\tilde{\xi}(x)\eta(x) = \sum_{x=1}^{N}\xi(x)\eta(x) + (\xi(x+1) - \xi(x))(\eta(x) - \eta(x+1)).$$

(Mazgų skaičius, kuriuose yra abiejų tipų dalelės, gali vienu sumažėti, vienu padidėti ir gali likti nepakitęs). Šiuo atveju, paskutinė sandauga šioje lygybėje lygi nuliui, nes sumuojam pagal (ξ,η) tokius, kad $\eta(x) = \eta(x+1) = 1$. Panašiai

$$J(f_1^{\cdots},{}^{1\,0}_{1\,0}) = a_{12} \sum_{(\xi,\eta)\in\chi_N} \sum_{x=1}^{N} f(\xi,\eta)(1-\xi(x+1))\xi(x)\eta(x)(1-\eta(x+1)) a_1^{\sum\xi(z)} a_2^{\sum\eta(z)} a_{12}^{\sum\xi(z)\eta(z)} \equiv a_{12} J(f,{}^{0\,1}_{1\,0})$$

("vagiui" pabėgus, tokių mazgų, kur yra abi dalelės, sumažėja, todėl atsiranda daugiklis a_{12}), bei

$$J(f_1^{\cdots},{}^{0\,1}_{1\,1}) = J(f,{}^{1\,0}_{1\,1}),\quad J(f_1^{\cdots},{}^{0\,1}_{0\,1}) = a_{12} J(f,{}^{1\,0}_{0\,1}).$$

Tokiu būdu, $I_1 = a_{12}J(f,{}^{0\,1}_{1\,0}) + a_{12}J(f,{}^{1\,0}_{0\,1}) - J(f,{}^{1\,0}_{1\,0}) - J(f,{}^{0\,1}_{0\,1})$.

Analogiškai randame narį $I_2 = \frac{1}{a_{12}} J(f,{}^{0\,1}_{0\,1}) + \frac{1}{a_{12}} J(f,{}^{1\,0}_{1\,0}) - J(f,{}^{0\,1}_{1\,0}) - J(f,{}^{1\,0}_{0\,1})$.

("Policininkui" pagavus "vagį", tokių mazgų, kur yra abi dalelės, padaugėja, todėl atsiranda daugiklis $\frac{1}{a_{12}}$). Matome, kad lygybė $\lambda_\xi I_1 + \lambda_\eta I_2 = 0$. yra teisinga (arba Bernulio tikimybės invariantiškos), jei patenkinta sąlyga $a_{12} = \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi}$. Panašiai įrodomas ir (2) atvejis.

Galima parodyti, kad bet kokiai porai $0 \le \rho_\xi, \rho_\eta \le 1$ egzistuoja vienas invariantinis tikimybių skirstinys P_{ρ_ξ,ρ_η} toks, kad $P_{\rho_\xi,\rho_\eta}(\xi(x)=1) = \rho_\xi$, $P_{\rho_\xi,\rho_\eta}(\eta(x)=1) = \rho_\eta$. Parinkus ρ_ξ, ρ_η, vienareikšmiškai išskaičiuojami $\rho_{11}, \rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{10}$, o lygybė $\rho_{11} = \rho_\xi \rho_\eta$ ($\xi(x)$ ir $\eta(x)$ nepriklausomybė) ekvivalentiška sąlygai $a_{12} = 1$.

3. Remiantis PVP ir DP panašumu, galima tikėtis, kad kai N ir $t \sim N$ dideli, PVP modelyje tikėtinas lokalios pusiausvyros atsiradimas (hidrodinaminis elgesys). Matematiškai tai reikštų, jog visiems $t \ge 0$ ir kiekvienai glodžiai funkcijai $g(y)$, $y \in (0,1]$ egzistuoja ribos

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \eta_{t_N}(x) g(x/N) = \int_0^1 \rho_\eta(t,y) g(y)\,dy,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} \xi_{t_N}(x) g(x/N) = \int_0^1 \rho_\xi(t,y) g(y)\,dy,$$

kur ribiniai dalelių tankiai $\rho_\xi(t,y)$, $\rho_\eta(t,y)$ atvejais (1) ir (2) tenkina *Burgerso* lygčių sistemą:

$$\frac{\partial \rho_\xi(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}[(\lambda_\xi^- - \lambda_\xi^+)\rho_\xi(t,y)(1-\rho_\xi(t,y))\rho_\eta(t,y)],$$

$$\frac{\partial \rho_\eta(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}[(\lambda_\eta^- - \lambda_\eta^+)\rho_\eta(t,y)(1-\rho_\eta(t,y))(1-\rho_\xi(t,y)];$$

su atitinkama pradine sąlyga $\rho_\xi(0,y) = \rho_\xi^0(y)$, $\rho_\eta(0,y) = \rho_\eta^0(y)$.

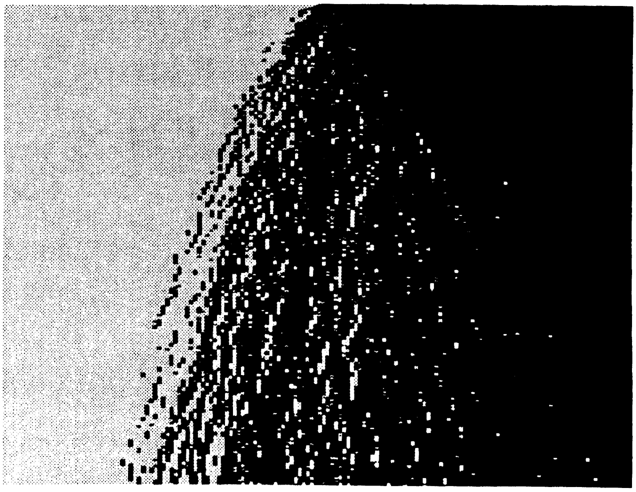
Šio tipo netiesinės diferencialinės lygtys pasižymi trūkių sprendinių (smūginių frontų) egzistavimu. Pasirodo, tokie sprendiniai gali susiformuoti net prie glodžių pradinių sąlygų. Paprasčiausi trūkūs *Burgerso* lygčių sistemos sprendiniai visoje tiesėje ($-\infty < y < \infty$) yra

$$\rho_\xi(t,y) = \begin{cases} \rho_\xi^+, jei\, y > ct, \\ \rho_\xi^-, jei\, y \le ct, \end{cases} \text{ ir } \rho_\eta(t,y) = \begin{cases} \rho_\eta^+, jei\, y > ct, \\ \rho_\eta^-, jei\, y \le ct, \end{cases}$$

čia $0 \le \rho_\xi^+, \rho_\xi^-, \rho_\eta^+, \rho_\eta^- \le 1$ – dalelių koncentracijos neigiamoje ir teigiamoje pusašėse pradiniu laiko momentu $t = 0$, o c – smūginio fronto judėjimo greitis lygus

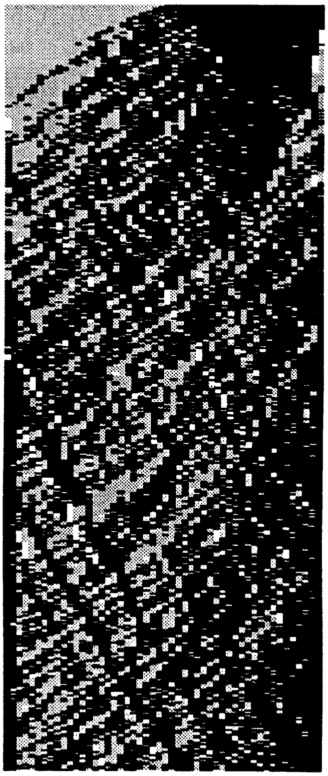
$$c = -(\lambda_\xi^- - \lambda_\xi^+)(1 - \rho_\xi^- - \rho_\xi^+) = -(\lambda_\eta^- - \lambda_\eta^+)(1 - \rho_\eta^- - \rho_\eta^+).$$

4. PVP evoliucija buvo modeliuojama kompiuteriu. Parinkus parametrų λ_ξ, λ_η reikšmes, procesas modeliuotas su invariantinėmis pradinėmis tikimybėmis ("pusiausvyros stovis"), keliomis skirtingomis parametrų ρ_ξ, ρ_η reikšmėmis. Tas pats padaryta paėmus neinvariantines pradines tikimybes. Stebėta pusiausvyra ir artėjimas į pusiausvyrą. Parametrai buvo parinkti tokie, kad modelio evoliucija vyktų kuo greičiau. Vaizduojant konfigūraciją kas tam tikrą jos pasikeitimų skaičių, gauti modelio evoliucijos grafiniai žemėlapiai.



1pav. Dalelių maišymasis, kai modeliuojamas artėjimas į pusiausvyrą.

2 pav. Pusiausvyros modeliavimas, kai $\rho_\xi = \rho_\eta = 0{,}5$.



3 pav. Artėjimas į pusiausvyrą.

LITERATŪRA

[1] T.M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer, 1985.

Model "Policemen and Thieves"

Gražvydas Felinskas

The article discusses "Policemen and Thieves" model similar to exclusion process.
The theorem about invariant measures of the process has been proved and hydrodynamic behavior has been discussed.