*LMD mokslo darbai*, III tomas, 489–498


# Аппроксимация нормальным законом функции распределения и ее плотности нелинейного преобразования стационарного гауссовского процесса

Леонас САУЛИС (ВГТУ, МИИ)
*e-mail: leonas.saulis@fm.vtu.lt*

Пусть $\{X_t,\ t=1,2,\ldots\}$ – вещественная стационарная гауссовская последовательность со средним 0 и ковариационной матрицей (к.м.)

$$R=\left[\mathbf{E}X_sX_t\right]_{s=\overline{1,n}}^{t=\overline{1,n}}, \tag{1}$$

причем $\det R\neq 0$. Пусть

$$\zeta_n=\sum_{s,t=1}^{n}a_{s,t}X_sX_t, \tag{2}$$

где не уменшая общности можем считать, что матрица

$$A=\left[a_{s,t}\right]_{s=\overline{1,n}}^{t=\overline{1,n}} \tag{3}$$

– симметрическая, ибо квадратичную форму с несимметрической матрицей $\widetilde{A}=\left[\widetilde{a}_{s,t}\right]_{s=\overline{1,n}}^{t=\overline{1,n}}$ можно свести к квадратичной форме от симметрической матрицы $A$, т.е.

$$\sum_{s,t=1}^{n}\widetilde{a}_{s,t}X_sX_t=\sum_{s,t=1}^{n}a_{s,t}X_sX_t,$$

где $a_{s,t}=\frac{1}{2}\left(\widetilde{a}_{s,t}+\widetilde{a}_{t,s}\right)$, причем $a_{s,t}=a_{t,s}$.

Через $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, обозначим спектр собственных значений матрицы $RA$, получаемый как множество корней алгебраического уравнения $n$-ой степени $\det(A-\mu R^{-1})=0$.

Известно, что случайная величина (сл. в) $\zeta_n$ распределена также, как и сл. в.

$$\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\mu_jY_j^2, \tag{4}$$

где $Y_j$ – независимые гауссовские сл. в. со средним 0 и дисперсией 1. Следовательно,

$$\mathbf{E}\zeta_n = \mathbf{E}\eta_n = \sum_{j=1}^{n} \mu_j, \quad \mathbf{D}\zeta_n = \mathbf{D}\eta_n = 2\sum_{j=1}^{n} \mu_j^2. \tag{5}$$

Обозначим,

$$\widetilde{\zeta}_n = \frac{\zeta_n - \mathbf{E}\zeta_n}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta_n}}, \quad F_{\widetilde{\zeta}_n}(x) = \mathbf{P}(\widetilde{\zeta}_n < x), \quad p_{\widetilde{\zeta}_n}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{\widetilde{\zeta}_n}(x) \tag{6}$$

– функция распределения (ф.р.) сл. в. $\widetilde{\zeta}_n$ и ее плотность;

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(y)\mathrm{d}y, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}x^2 \Big\} \tag{7}$$

– (0,1)-нормальное распределение и ее плотность, соответственно.

Для получения точности погрешности аппроксимации фукции распределения $F_{\widetilde{\zeta}_n}(x)$ и ее плотности $p_{\widetilde{\zeta}_n}(x)$ нормальным законом с учетом больших уклонений, воспользуемся методом купулянтов (семиинвариантов), который был предложен В.А. Статулявичусом в работе [1] и развит Р. Рудзкисом, Л. Саулисом и В.А. Статулявичусом в работе [4] ([3]).

## 1. Оценка кумулянтов (семиинвариантов) случайной величинь $\widetilde{\zeta}_n$

Обозначим

$$Z_j = \mu_j Y_j^2, \quad \eta_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j, \quad \mathcal{X}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} Y_j^2, \tag{8}$$

где $Y_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – независимые сл. в., имеющие (0,1)-нормальное распределение. Тогда известно, что плотность распределения сл. в. $\mathcal{X}_n^2$,

$$p_{\mathcal{X}_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 2^{-n/2}\Gamma^{-1}\Big(\dfrac{n}{2}\Big)x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, и $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, и характеристическая фукция (х. ф.)

$$f_{\mathcal{X}_n^2}(t) = \mathbf{E}\exp\big\{it\mathcal{X}_n^2\big\} = (1-2it)^{-n/2}. \tag{10}$$

Тогда нетрудно убедиться, что х. ф. сл. в. $Z_j := \mu_j Y_j^2$, и ее плотность распределения, соответственно равны:

$$f_{Z_j}(t) = f_{Y_j^2}(\mu_j t) = (1 - 2i\mu_j t)^{-1/2}, \tag{11}$$

$$p_{Z_j}(x) = \frac{1}{|\mu_j|} p_{Y_j^2}\left(\frac{x}{\mu_j}\right), \tag{12}$$

где

$$p_{Y_j^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{ -\dfrac{1}{2}x \right\}, & x > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Учитывая независимость сл. в. $Z_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и тот факт, что сл. в. $\eta_n = \sum_{j=1}^n Z_j$, получаем

$$f_{\eta_n}(t) = \mathbf{E}e^{it\eta_n} = \prod_{j=1}^n f_{Z_j}(t) = \prod_{j=1}^n (1 - 2i\mu_j t)^{-1/2}. \tag{14}$$

Кумулянт $k$-того порядка сл. в. $\eta_n$,

$$\Gamma_k(\eta_n) := \frac{1}{i^k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \ln f_{\eta_n}(t) \bigg|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Используя равенство (14), с помощью метода математической индукции, находим

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \ln f_{\eta_n}(t) = i^k (k-1)! 2^{k-1} \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^k}{(1 - 2i\mu_j t)^k},$$

$k = 1, 2, \ldots$. Тогда, согласно соотношению (15), имеем

$$\Gamma_k(\eta_n) = (k-1)! 2^{k-1} \sum_{j=1}^n \mu_j^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Отсюда, с учетом того что

$$\Gamma_1(\eta_n - \mathbf{E}\eta_n) = 0, \quad \Gamma_k(\eta_n - \mathbf{E}\eta_n) = \Gamma_k(\eta_n), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

получаем

$$\Gamma_k(\widetilde{\zeta}_n) = \Gamma_k\left( \frac{\zeta_n - \mathbf{E}\zeta_n}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta_n}} \right) = \frac{\Gamma_k(\eta_n)}{\left(\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}\right)^k} = \frac{(k-1)! 2^{k-1} \sum\limits_{j=1}^n \mu_j^k}{\left(2 \sum\limits_{j=1}^n \mu_j^2\right)^{k/2}}, \tag{17}$$

$k = 2, 3, \ldots$. Следовательно, для кумулянта $k$-кого порядка сл. в. $\widetilde{\zeta}_n$ верна следующая оценка:

$$\left|\Gamma_k(\widetilde{\zeta}_n)\right| \leqslant \frac{(k-1)!}{\Delta_n^{k-2}}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{18}$$

где

$$\Delta_n = \frac{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}{2 \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\mu_j|} = \frac{\left(2 \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j^2\right)^{1/2}}{2 \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\mu_j|}. \tag{19}$$

Далее, пусть

$$RA = B = \left[b_{s,t}\right]_{s=\overline{1,n}}^{t=\overline{1,n}}, \quad P = \max_{1 \leqslant s \leqslant n} \sum_{t=1}^{n} \left|b_{s,t}\right|, \quad Q = \max_{1 \leqslant t \leqslant n} \sum_{s=1}^{n} \left|b_{s,t}\right|.$$

где матрицы $R$ и $A$ определены соотношениями (1) и (2), соответственно. Тогда известно, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\mu_j| \leqslant \min\{P, Q\}. \tag{20}$$

## 2. Аппроксимация функции распределения $F_{\widetilde{\zeta}_n}(x)$ нормальным законом с учетом больших уклонений

Имеея оценку (18) для кумулянтов $\Gamma_k(\widetilde{\zeta}_n)$ сл. в. $\widetilde{\zeta}_n$ и используя общие леммы для произвольной сл. в. $\zeta$ с регулярным поведением ее кумулянтов [3] (лемма 2.1 на стр. 17, лемма 2.3 на стр. 18, лемма 2.4 на стр. 19), получаем следующие утверждения.

Пусть

$$\Delta_n^* := c_0 \Delta_n, \quad c_0 = (1/6)(\sqrt{2}/6), \tag{21}$$

где $\Delta_n$ определено равенством (19), и $\theta_i$, $i = 1, 2, \ldots$ означает некоторую величину, не всегда одну и ту же, не превосходящую единицы по модулю.

**Теорема 1.** *Для функции распределения $F_{\widetilde{\zeta}_n}(x)$ сл. в. $\widetilde{\zeta}_n$, определенной соотношением* (6), *в интервале*

$$0 \leqslant x < \Delta_n^*, \tag{22}$$

*имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned}\frac{1-F_{\widetilde{\zeta}_n}(x)}{1-\Phi(x)} &= \exp\left\{L_n(x)\right\}\left(1+\theta_1 f(x)\frac{x+1}{\Delta_n^*}\right),\\ \frac{F_{\widetilde{\zeta}_n}(-x)}{\Phi(-x)} &= \exp\left\{L_n(-x)\right\}\left(1+\theta_2 f(x)\frac{x+1}{\Delta_n^*}\right).\end{aligned} \tag{23}$$

*Здесь*

$$f(x) = \frac{60\Big(1+10\Delta_n^{*^2}\exp\big\{-(1-x/\Delta_n^*)\sqrt{\Delta_n^*}\big\}\Big)}{1-x/\Delta_n^*}, \tag{24}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=3}^{\infty}\lambda_{n,k}x^k, \tag{25}$$

*где коэффициенты $\lambda_{n,k}$ находятся по формуле*

$$\lambda_{n,k} = -b_{n,k-1}/k, \tag{26}$$

*причем $b_{n,k}$ вычисляются при последовательном решении уровнений*

$$\sum_{r=1}^{1}\frac{1}{r!}\Gamma_{r+1}(\widetilde{\zeta}_n)\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_r=j\\ j_i\geqslant 1}}\prod_{i=1}^{r}b_{n,j_i} = \begin{cases}1, & j=1\\ 0, & j=2,3,\ldots.\end{cases} \tag{27}$$

*В частности,*

$$\begin{aligned}&b_{n,1}=1,\quad b_{n,2}=-\frac{1}{2}\Gamma_3(\widetilde{\zeta}_n),\quad b_{n,3}=-\frac{1}{6}\big(\Gamma_4(\widetilde{\zeta}_n)-3\Gamma_3^2(\widetilde{\zeta}_n)\big),\\ &b_{n,4}=-\frac{1}{24}\big(\Gamma_5(\widetilde{\zeta}_n)-10\Gamma_3(\widetilde{\zeta}_n)\Gamma_4(\widetilde{\zeta}_n)+15\Gamma_3^3(\widetilde{\zeta}_n)\big),\ldots.\end{aligned}$$

*Для коэффициентов $\lambda_{n,k}$ верна следующая оценка:*

$$|\lambda_{n,k}| \leqslant \frac{2}{k}\left(\frac{16}{\Delta_n}\right)^{k-2},\quad k=3,4,\ldots, \tag{28}$$

*и, следовательно*

$$L_n(x)\leqslant\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x}{x+8\Delta_n^*},\quad L_n(-x)\geqslant-\frac{x^3}{3\Delta_n^*}, \tag{29}$$

*где $\Delta_n^*$ определено равенством (21).*

Доказательство теоремы немедленно следует если воспользоваться леммой 2.3 [3], привлекая оценку (18) для кумулянтов $\Gamma_k(\widetilde{\zeta}_n)$, $k=3,4,\ldots$, сл. в. $\widetilde{\zeta}_n$.

**Теорема 2.** *В области $x \geqslant 0$, $x = o(\Delta_n^{1/3})$, $\Delta_n \to \infty$, где $\Delta_n$ определено равенством* (19),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F_{\tilde{\zeta}_n}(x)}{1 - \Phi(x)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F_{\tilde{\zeta}_n}(-x)}{\Phi(-x)} = 1. \tag{30}$$

Для доказательства теоремы следует воспользоваться соотношениями (25), (26) и (23), (24).

**Теорема 3.** *Для вероятностей сл. в. $\tilde{\zeta}_n$, определенной равенством* (6), *верны следующие оценки:*

$$\mathbf{P}\{\pm\tilde{\zeta}_n \geqslant x\} \leqslant \begin{cases} \exp\Big\{-\dfrac{1}{4}x^2\Big\}, & 0 \leqslant x \leqslant \Delta_n, \\ \exp\Big\{-\dfrac{1}{4}\Delta_n x\Big\}, & x \geqslant \Delta_n, \end{cases} \tag{31}$$

*где $\Delta_n$ определено равенством* (19).

Для доказательства теоремы нужно воспользоваться леммой 2.4 [3], привлекая оценку (18) для кумулянтов $\Gamma_k(\tilde{\zeta}_n)$ сл. в. $\tilde{\zeta}_n$, и учесть тот факт что $(k-1)! \leqslant \frac{1}{2}k!$, $k = 2, 3, \ldots$.

**Теорема 4.** *Для функции распределения $F_{\tilde{\zeta}_n}(x)$ сл. в. $\tilde{\zeta}_n$, оределенной равенством* (6), *имеет место оценка:*

$$\sup_x \big|F_{\tilde{\zeta}_n}(x) - \Phi(x)\big| \leqslant \frac{18}{\Delta_n^*}, \tag{32}$$

*где $\Delta_n^*$ определено равенством* (21).

Доказательство теоремы получаем используя следствие леммы 2.1 [3], привлекая оценку (18) для кумулянтов сл. в. $\tilde{\zeta}_n$.

## 3. Аппроксимация плотности распределения $p_{\tilde{\zeta}_n}(x)$ нормальным законом

Для решения такого рода задач следует воспользоваться общей леммой для плотности распределения (п. р.) произвольной сл. в. $\xi$ с регулярным поведением ее кумулянтов.

Пусть для сл. в. $\xi$ с $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi = 1$ существует величины $\gamma \geqslant 0$ и $\Delta > 0$ такие, что

$$\big|\Gamma_k(\xi)\big| \leqslant \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\Delta^{k-2}}, \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{S$_\gamma$}$$

Кроме того, пусть существует плотность распределения $p_\xi(x)$, причем

$$\sup_x p_\xi(x) < \infty. \tag{A}$$

Пусть $\mathcal{E}$ – множество точек в которых $p_\xi(x)$ непрерывна или имеет разрыв первого рода. В точке разрыва $x_0$,

$$p_\xi(x_0) := \frac{1}{2}\big(p_\xi(x_0-0)+p_\xi(x_0+0)\big).$$

Обозначим,

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)}, \quad c_\gamma = \frac{1}{6}\Big(\frac{\sqrt{2}}{6}\Big)^{1/(1+2\gamma)}, \quad f_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}. \tag{33}$$

**Лемма.** *Если для сл. в.* $\xi$ *с* $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$ *выполнены условия* ($\mathrm{S}_\gamma$) *и* (A), *то*

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathcal{E}}\big|p_\xi(x)-\varphi(x)\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigg\{&\frac{16\cdot 6^\gamma}{\Delta} + 364\Delta_\gamma \exp\Big\{-\frac{3}{2}\sqrt{\Delta_\gamma}\Big\}\\ &+ \int\limits_{|t|\geqslant\Delta_\gamma}\Big|f_\xi(t)-e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|\,dt\bigg\}.\end{aligned} \tag{34}$$

*Следствие.* Если $p''_\xi(x)$, $\forall x\in R$ существует и принадлежит классу $L_1(-\infty,\infty)$, то $\big|f_\xi(t)\big| \sim t^{-2}$ при $t\to\infty$. Следовательно,

$$\sup_{x\in\mathcal{E}}\big|p_\xi(x)-\varphi(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\Delta_\gamma}. \tag{35}$$

Доказательство леммы приведено в работе автора статьи [5] ([3]).

На основании неравенства (18) убеждаемся, что для сл. в. $\xi = \widetilde{\zeta}_n$, определенной равенством (6), выполнено условие ($\mathrm{S}_\gamma$) с показателем $\gamma = 0$, и величина

$$\Delta = \Delta_n = \Big(2\sum_{j=1}^{n}\mu_j^2\Big)^{1/2}\Big(2\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\mu_j|\Big)^{-1}. \tag{36}$$

Тогда согласно определению величины $\Delta_\gamma$ равенством (33), имеем

$$\Delta_\gamma = \Delta_n^* = c_0\Delta_n, \quad c_0 = (1/6)(\sqrt{2}/6). \tag{37}$$

Следовательно, для получения оценки точности погрешности аппроксимации плотности распределения $p_{\widetilde{\zeta}_n}(x)$ нормальной плотностью $\varphi(x)$, следует воспользоваться общей леммой.

**Теорема 5.** *Для плотности распределения* $p_{\widetilde{\zeta}_n}(x)$ *сл. в.* $\widetilde{\zeta}_n$, *определенной равенством* (6) *верна оценка:*

$$\sup_x \left|p_{\widetilde{\zeta}_n}(x) - \varphi(x)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{16}{\Delta_n} + 15\Delta_n \exp\left\{ -\frac{1}{4}\sqrt{\Delta_n} \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2} \left( \frac{2\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j^2}{\prod\limits_{k=1}^{4} \left|\mu_{i_k}\right|^{1/2}} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{c_0^2}{8} \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i_k}}^{n} \mu_j^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j^2} \right\} \right\}. \tag{38}$$

*Доказательство.* Согласно лемме, нужно оценить интеграл

$$I = \int\limits_{|t|\geqslant\Delta_n^*} \left|f_{\widetilde{\zeta}_n}(t) - \exp\left\{ -\frac{1}{2}t^2 \right\}\right| \mathrm{d}t. \tag{39}$$

Имеем,

$$I \leqslant I_1 + I_2, \tag{40}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|t|\geqslant\Delta_n^*} \left|f_{\widetilde{\zeta}_n}(t)\right| \mathrm{d}t, \quad I_2 = \int\limits_{|t|\geqslant\Delta_n^*} \exp\left\{ -\frac{1}{2}t^2 \right\} \mathrm{d}t.$$

Привлекая соотношения (6), (8) и (11), находим

$$\left|f_{\widetilde{\zeta}_n}(t)\right| = \left|f_{\eta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|f_{Z_j}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right| = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{4\mu_j^2}{\mathbf{D}\eta_n}t^2\right)^{-1/4}. \tag{41}$$

Отсюда, интеграл

$$I_1 = \int\limits_{|t|\geqslant\Delta_n^*} \exp\left\{ -\frac{1}{4} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_k}}^{n} \ln\left(1 + \frac{4\mu_j^2}{\mathbf{D}\eta_n}t^2\right) \right\} \cdot \prod_{k=1}^{4} \left|f_{Z_{i_k}}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right| \mathrm{d}t. \tag{42}$$

Вспомнив соотношение (11), находим

$$\prod_{k=1}^{2} \left|f_{Z_{i_k}}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right| \leqslant \left(1 + \frac{4\sqrt{\mu_{i_1}^2\mu_{i_2}^2}}{\mathbf{D}\eta_n}t^2\right)^{-1/2}. \tag{43}$$

Заметив, что $\ln(1+x) > \frac{1}{2}x$, $0 < x < 1$, для $|t| \geqslant \Delta_n^*$, $\Delta_n^* = c_0\Delta_n$, имеем

$$\ln\left(1 + \frac{4\mu_j^2}{\mathbf{D}\eta_n}t^2\right) \geqslant \ln\left(1 + \frac{(c_0\mu_j)^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{(c_0\mu_j)^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j^2}. \tag{44}$$

Отсюда, привлекая соотношение (42) и используя неравенство Гельдера, получаем

$$I_1 \leqslant \exp\left\{-\frac{c_0^2}{8}\cdot\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i_k}}^{n} \mu_j^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j^2}\right\}$$

$$\times\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{2}\left|f_{Z_{i_k}}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right|^2 \mathrm{d}t\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=3}^{4}\left|f_{Z_{i_k}}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{45}$$

В свою очередь, учитывая неравенство (44), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{2}\left|f_{Z_{i_k}}\left(\frac{t}{\sqrt{\mathbf{D}\eta_n}}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{\infty}\left(1 + \frac{4|\mu_{i_1}||\mu_{i_2}|}{\mathbf{D}\eta_n}t^2\right)^{-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\mathbf{D}\eta_n}{|\mu_{i_1}||\mu_{i_2}|}\right)^{1/2}. \tag{46}$$

Следовательно, интеграл

$$I_1 \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j^2}{\prod\limits_{k=1}^{4}|\mu_{i_k}|^{1/2}}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{c_0^2}{8}\frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i_k}}^{n}\mu_j^2}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\mu_j^2}\right\}. \tag{47}$$

Осталась оценить интеграл $I_2$. Иммем,

$$I_2 = \int\limits_{|t|\geqslant\Delta_n^*}\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\Delta_n^*}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta_n^{*2}\right\}, \tag{48}$$

где $\Delta_n^* = c_0\Delta_n$, причем $c_0$ и $\Delta_n$ определены равенствами (37) и (36), соответственно.

На основании леммы и соотношении (39), (40), (47) и (48), получаем утверждение теоремы 5.

## Литература

[1] V.A. Statulevičius, On large deviations, *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 133–144 (1966).

[2] Л. Саулис, В. Статулявичус, *Предельные Теоремы о Больших Уклонениях*, Вильнюс, Мокслас (1989).

[3] L. Saulis, V.A. Statulevičius, *Limit Theorems for Large Deviations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1991).

[4] Р. Рудзкис, Л. Саулис, В. Статулявичус, Общая лемма о вероятностях больших уклонений, *Liet Matem. Rink.*, 99–116 (1978).

[5] L. Saulis, On large deviations for the probability density of sums of independent random variables, *Probability Theory and Mathematical Statistics, Proccedings of Fourth Vilnius Conference*, Vilnius, 24 – 29 June 1985, VNU Science Press, 541–559 (1986).

# Stacionaraus Gauso proceso netiesinės formos skirstinio funkcijos ir jo tankio aproksimacija normaliuoju dėsniu.

L. Saulis

Darbas skirtas tikslioms didžiųjų nuokrypių teoremoms kvadratinei formai

$$\zeta_n = \sum_{s,t=1}^{n} a_{s,t} X_s X_t,$$

kur $X_t,\ t = 1, 2, \dots,$ – stacionarus Gauso procesas ir $A = [a_{s,t}]_{s=\overline{1,n}}^{t=\overline{1,n}}$ – simetrinė matrica. Gautos eksponentinės nelygybės. Atitinkamai centruoto ir normuoto atsitiktinio dydžio $\zeta_n$ skirstinio funkcijos tankiui gautas aproksimacijos normaliuoju dėsniu tikslumo įvertis (teorema 5).