LMD mokslo darbai, III tomas, 461–464

Maksimumų su atsitiktiniu komponenčių skaičiumi asimptotiniai tyrimai

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime, turime dvi atsitiktinių dydžių sekas:

$\{X_j, j \geqslant 1\}$ – nepriklausomų su $P(X_j \leqslant x) = F(x)$

ir

$\{N_n, n \geqslant 1\}$ – įgyjančių tik sveikas neneigiamas reikšmes. Atsitiktiniai dydžiai X_j ir N_n su visais $j \geqslant 1$ ir $n \geqslant 1$ yra nepriklausomi.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n), \quad Z_{N_n} = \max(X_1, \ldots, X_{N_n})$$

Tarkime, kad yra tokia realiųjų skaičių seka $\{u_n, n \geqslant 1\}$, su kuria

$$\tau_n = n(1 - F(u_n)) \to \tau, \quad 0 \leqslant \tau < \infty, \tag{*}$$

kai $n \to \infty$.

Tada ([2])

$$P(Z_n \leqslant u_n) \to \mathrm{e}^{-\tau}, \tag{1}$$

kai $n \to \infty$.

Jeigu dar

$$A_n(x) = P\left(\frac{N_n}{n} \leqslant x\right) \to A(x), \tag{2}$$

kai $n \to \infty$, tai ([4])

$$P(Z_{N_n} \leqslant u_n) \to \Psi(\tau); \tag{3}$$

čia

$$\Psi(\tau) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x} \mathrm{d}A(x).$$

Sąryšiai (1), (2) ir (3) apibūdina taip vadinamą perkėlimo teoremą.

Teorema (perkėlimo). *Jei yra* (1) *ir* (2), *tai yra ir* (3) ([4]).

Konvergavimo greičiai (1) sąryšyje yra tirti [2] ir [4] darbuose. Greičių įverčiai (3) sąryšyje, kai $u_n = u_n(x)$ *ir* $\tau = \tau(x)$ priklauso nuo parametro x, buvo pateikti [1] ir [3]. Ten normavimas yra arba tiesinis $u_n(x) = xb_n + a_n \quad (b_n > 0, a_n \in R)$ arba – netiesinis. Apie konvergavimo greičių įverčius, esant (*) sąlygai,straipsnio autorius skaitė pranešimą 7-toje Vilniaus tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencijoje. Yra pateiktos pranešimo tezės ([4]). Šiame straipsnyje mes praplečiame ir patiksliname tų tezių teiginius.

2. Rezultatų formuluotė ir įrodymas

Pateikiame teoremą, iš kurios išplaukia konvergavimo greičio įvertis perkėlimo teoremoje.

Teorema. *Tarkime, yra* (*) *ir* (2) *sąlygos ir* $A(+0) = 0$. *Tada*

$$\begin{aligned} |P(Z_{N_n} \leqslant u_n) - \Psi(\tau)| \leqslant{} & \left|F^n(u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\right| \alpha_n(\tau) \\ & + \tau \left| \int_0^\infty (A_n(nx) - A(x))\, \mathrm{e}^{-\tau x} \mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

čia

$$\alpha_n(\tau) = \int_0^\infty x \max\left(F^{n(x-1)}(u_n), \mathrm{e}^{-\tau(x-1)}\right) \mathrm{d}A_n(nx).$$

Įrodymas.

$$\begin{aligned} |P(Z_{N_n} \leqslant u_n) - \Psi(\tau)| \leqslant{} & \left|P(Z_{N_n} \leqslant u_n) - M\mathrm{e}^{-\frac{\tau N_n}{n}}\right| \\ & + \left|M\mathrm{e}^{-\frac{\tau N_n}{n}} - \Psi(\tau)\right| = \Delta_{N_n}^{(1)} + \Delta_{N_n}^{(2)}. \end{aligned}$$

Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}^{(1)}(\tau) &\leqslant \sum_{j \geqslant 1} \left|F^j(u_n) - \mathrm{e}^{-\frac{\tau j}{n}}\right| P(N_n = j) \\ &= \sum_{j \geqslant 1} \left|(F^n(u_n))^{\frac{j}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\tau j}{n}}\right| P\left(\frac{N_n}{n} = \frac{j}{n}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Kadangi

$$\left|\left(F^n(u_n)\right)^{\frac{j}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\tau j}{n}}\right| \leqslant \frac{j}{n}\max\left(F^{n\left(\frac{j}{n}-1\right)}(u_n), \mathrm{e}^{-\tau\left(\frac{j}{n}-1\right)}\right)\left|F^n(u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\right|,$$

tai iš (4), gauname:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{N_n}^{(1)}(\tau) \\
&\leqslant \left|F^n(u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\right| \sum_{j\geqslant 1} \frac{j}{n}\max\left(F^{n\left(\frac{j}{n}-1\right)}(u_n), \mathrm{e}^{-\tau\left(\frac{j}{n}-1\right)}\right) P\left(\frac{N_n}{n} = \frac{j}{n}\right) \\
&= \left|F^n(u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\right| \int_0^\infty x\max\left(F^{n(x-1)}(u_n), \mathrm{e}^{-\tau(x-1)}\right) \mathrm{d}A_n(nx).
\end{aligned} \tag{5}$$

Toliau:

$$\begin{aligned}
\Delta_{N_n}^{(2)} &= \left|M\mathrm{e}^{-\frac{\tau N_n}{n}} - \Psi(\tau)\right| \\
&= \left|\sum_{j\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\frac{\tau j}{n}} P(N_n = j) - \Psi(\tau)\right| = \left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{d}A_n(nx) - \Psi(\tau)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{d}\left(A_n(nx) - A(x)\right)\right| = \tau\left|\int_0^\infty \left(A_n(nx) - A(x)\right)\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned} \tag{6}$$

Iš (5) ir (6) gauname teoremos teiginį.

Tokiu būdu, turėdami konvergavimo greičių įverčius (1) ir (2) sąryšiuose

$$\left|P(Z_n \leqslant u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\right| \leqslant \Delta_n^{(1)}(\tau)$$

ir

$$\left|A_n(nx) - A(x)\right| \leqslant \Delta_n^{(2)}(x),$$

gauname konvergavimo greičio įvertį perkėlimo teoremoje.

Pavyzdys. Tarkime, kad

$$P(X_j \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x \geqslant 0$$

ir

$$P(N_n = j) = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Imdami $u_n = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\tau}{n}$, gauname:

$$F^n(u_n) = \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n.$$

Tada

$$\left|F^n(u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\right| \leqslant \frac{\tau^2\mathrm{e}^{-\tau}}{2(n-1)} \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{-2}}{n-1}.$$

Kadangi $A(x) = x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$ ir

$$\Delta_{N_n}^{(2)}(\tau) \leqslant \frac{\tau}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{d}x = \frac{1}{n},$$

tai aproksimavimo paklaida

$$\left|P(Z_{N_n} \leq u_n) - \frac{1-\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\right|$$

perkėlimo teoremoje yra eilės $1/n$.

Literatūra

[1] Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Москва, Наука (1984).

[2] M.R. Leadbetter *et al.*, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, New York, Heldelberg, Berlin (1986).

[3] A. Aksomaitis, The nonuniform estimation of the convergence rate in the transfer theorem for extremal values, *Lith. Math. Journal*, **2**, 219–223 (1987).

[4] A. Aksomaitis, Rates of convergence in the transference theorems for the extrema values, *22nd. European Meeting of statisticians*, Vilnius, TEV, Abstracts, p.114 (1998).

Asymptotical analysis of maxima with a random number of component variables

A. Aksomaitis

Estimates of the convergence rate in the transference theorem are presented. They generalize and make more precise results obtained in [2] and [3].