LMD mokslo darbai, III tomas, 439–443

Gniuždomos plokštės stabilumas valkšnumo sąlygomis

Algimantas BARTAŠEVIČIUS (LŽŪU)

Tiriame gniuždomos stačiakampės ploktės $l \times b$ deformacijas ir stabilumą tamprumo ir valkšnumo sąlygomis. Įvairių konstrukcijų stačiakampės plokštės veikiant jėgoms dažnai būna gniuždomos arba lenkiamos. Viena kryptimi gniuždoma plokštė gali įgyti įvairias pusiausvyros padėtis. Skaičiuodami kritinę gniuždymo jėgos reikšmę, t.y. kai išlinkusi deformuota plokštė nustojus veikti atsitiktinėms jėgoms nebegrįžta į plokščią pusiausvyros padėtį, tirsime „kietas " plokštes, t.y. kada plokštės vidurinio sluoksnio įtempimai ir deformacijos yra maži. Tamprios gniuždomos plokštės stabilumas yra išnagrinėtas [1]. Pasinaudosime plokštės elemento pusiausvyros lygtimi:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} = -\delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h^2, \tag{1}$$

kur

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_x Z\,dZ, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_y Z\,dZ, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_{xy} Z\,dZ \tag{2}$$

yra momentai, h – plokštės storis, $w(x,y)$ – kiekvieno plokštės taško įlinkis, $\delta_0 = \mathrm{const}$ – viena kryptimi gniuždomos plokštės pastovūs įtempimai. Minimali kritinė tamprios šarnyriškai paremtos gniuždomos plokštės įtempimų reikšmė yra apskaičiuota [1]:

$$\delta_{x\,\mathrm{krit.}} = \frac{D\pi^2}{hb^2}\left(\frac{b}{l} + \frac{l}{b}\right)^2, \quad D\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Toliau tiriame viena kryptimi gniuždomos plonasienės h storio plokštės stabilumą valkšnumo sąlygomis. Naudosime valkšnumo sustiprėjimo teorijos laipsninę būvio lygtį [2]:

$$\dot p_{ij} = \frac{2}{3} A p^{-\lambda} \delta_0^{n-1} \delta_{ij}, \quad A = \mathrm{const},$$

$$\dot p^2 = \frac{2}{3} \dot p_{ij} \dot p_{ij} = \frac{2}{3}\left(\dot p_x^2 + \dot p_y^2 + 2\dot p_{xy}^2\right),$$

$$\delta_0^2 = \frac{3}{2}\delta_{ij}\cdot \delta_{ij} = \frac{3}{2}\left(\delta_x^2 + \delta_y^2 + 2\delta_{xy}^2\right), \quad (n > \lambda + 1), \tag{3}$$

$\mathcal{E} = \frac{\delta_0}{E} + p$, $\frac{\delta_0}{E} << p$, t.y. $\mathcal{E} \approx p$.

Iš šių lygčių parašome šias priklausomybes:

$$\dot{\mathcal{E}}_x = \frac{3}{2} A\mathcal{E}^{-\lambda}\delta_0^{n-1}\delta_x,$$

$$\dot{\mathcal{E}}_y = \frac{3}{2} A\mathcal{E}^{-\lambda}\delta_0^{n-1}\delta_y,$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{xy} = \frac{3}{2} A\mathcal{E}^{-\lambda}\delta_0^{n-1}\delta_{xy}, \tag{4}$$

$$\dot{\mathcal{E}}^2 = \frac{2}{3}\left(\dot{\mathcal{E}}_x^2 + \dot{\mathcal{E}}_y^2 + 2\dot{\mathcal{E}}_{xy}^2\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} A\mathcal{E}^{-\lambda}\delta_0^{n-1}\right)^2 \left(\delta_x^2 + \delta_y^2 + 2\delta_{xy}^2\right) = \left(\frac{3}{2} A\mathcal{E}^{-\lambda}\delta_0^{n-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\delta_0\right)^2$$

Iš (4) lygčių skaičiuojame įtempimus δ_x, δ_y ir δ_{xy}:

$$\delta_x = \frac{2}{3}\dot{\mathcal{E}}_x\mathcal{E}^{\lambda}\left(A\delta_0^{n-1}\right)^{-1} = \frac{2\dot{\mathcal{E}}_x\mathcal{E}^{\frac{\lambda}{n}}}{3A^{\frac{1}{n}}\dot{\mathcal{E}}^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\delta_y = \frac{2\dot{\mathcal{E}}_y\mathcal{E}^{\frac{\lambda}{n}}}{3A^{\frac{1}{n}}\dot{\mathcal{E}}^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\delta_{xy} = \frac{2\dot{\mathcal{E}}_{xy}\mathcal{E}^{\frac{\lambda}{n}}}{3A^{\frac{1}{n}}\dot{\mathcal{E}}^{\frac{n-1}{n}}}. \tag{5}$$

Tiriame „kietas“ plokštes, kurių vidurinis sluoksnis tik išlinksta. Be to, tiriame mažų deformacijų atvejį. Tada

$$\mathcal{E}_x = Z\ae_x = Z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = ZW_{x^2},$$

$$\mathcal{E}_y = ZW_{y^2}, \quad \mathcal{E}_{xy} = \ae_{xy}Z = ZW_{xy},$$

$$\mathcal{E}^2 = \frac{2}{3}\left(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + 2\mathcal{E}_{xy}^2\right) = \frac{2}{3}\left(W_{x^2} + W_{y^2} + 2W_{xy}^2\right) Z^2,$$

$$\dot{\mathcal{E}}^2 = \frac{2}{3}\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy^2}^2\right) Z^2. \tag{6}$$

Plokštės vidinių taškų įtempimus δ_x, δ_y ir δ_{xy} išreiškiame įlinkiais $W = W(x, y, t)$:

$$\delta_x = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+\lambda+1}{2n}} Z^{\frac{\lambda+1}{n}-1}\dot{W}_{x^2}\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2 + 2W_{xy}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{A^{\frac{1}{n}}\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}},$$

$$\delta_y = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+\lambda+1}{2n}} Z^{\frac{\lambda+1}{n}-1}\dot{W}_{y^2}\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2 + 2W_{xy}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{A^{\frac{1}{n}}\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}},$$

$$\delta_{xy} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+\lambda+1}{2n}} Z^{\frac{\lambda+1}{n}-1}\dot{W}_{xy}\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2 + 2W_{xy}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{A^{\frac{1}{n}}\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}}. \tag{7}$$

Po to iš (2) formulių skaičiuojame momentus. Gauname tokias išraiškas:

$$M_x = \frac{B\dot{W}_{x^2}\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2 + 2W_{xy}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}},$$

$$M_y = \frac{B\dot{W}_{y^2}\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2 + 2W_{xy}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}}, \tag{8}$$

$$M_{xy} = \frac{B\dot{W}_{xy}\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2 + 2W_{xy}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2 + 2\dot{W}_{xy}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}},$$

kur

$$B = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+\lambda+1}{2n}}\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+\lambda+1}{n}}\frac{2n}{(n+\lambda+1)A^{\frac{1}{n}}}.$$

Apsiribosime mažų šlyties deformacijų atveju, t.y. $\mathcal{E}_{xy} \approx 0$. Tada $W_{xy} \approx 0$ ir $M_{xy} \approx 0$. Įstatę momentų (8) išraiškas į (1) pusiausvyros lygtį ir atlikę veiksmus, gauname tokią diferencialinę lygtį dalinėmis išvestinėmis įlinkiams $W(x, y, t)$ skaičiuoti:

$$L(W) = \left(\frac{\dot{W}_{x^4}\dot{W}_{x^2} - \dot{W}_{x^3}^2}{\dot{W}_{x^2}^2} + \frac{\lambda\left(W_{x^3}^2 + W_{x^2}W_{x^4} + W_{xy^2}^2 + W_{y^2}W_{x^2y^2}\right)}{n\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2\right)}\right.$$

$$-\frac{2\lambda\left(W_{x^2}W_{x^3} + W_{y^2}W_{xy^2}\right)\left(W_{x^2}W_{x^3} + W_{y^2}W_{xy^2}\right)}{n\left(W_{x^2}^2 + W_{y^2}^2\right)^2}$$

$$-\frac{(n-1)\left(\dot{W}_{x^3}^2 + \dot{W}_{x^2}\dot{W}_{x^4} + \dot{W}_{xy^2}^2 + \dot{W}_{y^2}\dot{W}_{x^2y^2}\right)}{n\left(\dot{W}_{x^2}^2 + \dot{W}_{y^2}^2\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2(n-1)\left(\dot W_{x^2}\dot W_{x^3}+\dot W_{y^2}\dot W_{xy^2}\right)\left(\dot W_{x^2}\dot W_{x^3}+\dot W_{y^2}\dot W_{xy^2}\right)}{n\left(W_{x^2}^2+W_{y^2}^2\right)^2}\\
&+\left(\frac{\dot W_{x^3}}{\dot W_{x^2}}+\frac{\lambda}{n}\frac{W_{x^2}W_{x^3}+W_{y^2}W_{xy^2}}{W_{x^2}^2+W_{y^2}^2}-\frac{n-1}{n}\frac{\dot W_{x^2}\dot W_{x^3}+\dot W_{y^2}\dot W_{xy^2}}{\dot W_{x^2}^2+\dot W_{y^2}^2}\right)^2\Bigg)\\
&\times\frac{B\dot W_{x^2}\left(W_{x^2}^2+W_{y^2}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{\left(\dot W_{x^2}^2+\dot W_{y^2}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}}\\
&+\Bigg(\frac{\dot W_{y^4}\dot W_{y^2}-\dot W_{y^3}^2}{\dot W_{y^2}^2}+\frac{\lambda\left(W_{x^2y}^2+W_{x^2}W_{x^2y^2}+W_{y^3}^2+W_{y^2}\dot W_{y^4}\right)}{n\left(W_{x^2}^2+W_{y^2}^2\right)}\\
&-\frac{2\lambda\left(W_{x^2}W_{x^2y}+W_{y^2}W_{y^3}\right)\left(W_{x^2}W_{x^2y}+W_{y^2}W_{y^3}\right)}{n\left(W_{x^2}^2+W_{y^2}^2\right)^2}\\
&-\frac{(n-1)\left(\dot W_{x^2y}+\dot W_{x^2}\dot W_{x^2y^2}+\dot W_{y^3}^2+\dot W_{y^2}\dot W_{y^4}\right)}{n\left(\dot W_{x^2}^2+\dot W_{y^2}^2\right)}\\
&+\frac{2(n-1)\left(\dot W_{x^2}\dot W_{x^2y}+\dot W_{y^2}\dot W_{y^3}\right)\left(\dot W_{x^2}\dot W_{x^2y}+\dot W_{y^2}\dot W_{y^3}\right)}{n\left(\dot W_{x^2}^2+\dot W_{y^2}^2\right)^2}\\
&+\left(\frac{\dot W_{y^3}}{\dot W_{y^2}}+\frac{\lambda}{n}\frac{W_{x^2}W_{x^2y}+W_{y^2}W_{y^3}}{W_{x^2}^2+W_{y^2}^2}-\frac{n-1}{n}\frac{\dot W_{x^2}\dot W_{x^2y}+\dot W_{y^2}\dot W_{y^3}}{W_{x^2}^2+\dot W_{y^2}^2}\right)^2\Bigg)\\
&\times\frac{B\dot W_{y^2}\left(W_{x^2}^2+W_{y^2}^2\right)^{\frac{\lambda}{2n}}}{\left(\dot W_{x^2}^2+\dot W_{y^2}^2\right)^{\frac{n-1}{2n}}}+\delta_0h^2W_{x^2}=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Tiriame stačiakampės šarnyriškai paremtos viena kryptimi gniuždomos plokštės stabilumą. Tam atvejui turime tokias kraštines ir pradinę sąlygas įlinkiams $W(x,y,t)$ skaičiuoti:

$$
W_{y^2}\big|_{y=0}=0,\quad W_{y^2}\big|_{y=b}=0,\quad W\big|_{t=0}=W_0(x,y)=f\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{b},
\tag{10}
$$

kur $W_0(x,y)$ yra atitinkamo tamprumo teorijos uždavinio sprendinys, išnagrinėtas [1].

(9) diferencialinės lygties apytikslį sprendinį, kuris tenkina (10) kraštines ir pradinę sąlygas, ieškome pavidalu:

$$W(x,y,t) = U(t)\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi y}{b},\ (0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y \leqslant b),\ U(0) = f. \tag{11}$$

Pagal Bubnovo-Galiorkino metodą turime:

$$\int_0^l dx \int_0^b WL(W)\,dy = 0.$$

Atlikę visus skaičiavimus įlinkių amplitudei $U(t)$ skaičiuoti, gauname tokią paprastą diferencialinę lygtį:

$$\dot{U}\,U^{\lambda-n} = \delta_0^n, \quad U(0) = f. \tag{12}$$

Čia bendra integravimo konstanta yra įjungta į bematį lauką t. (12) diferencialinės lygties sprendinys yra toks:

$$U(t) = \frac{f}{(1-(n-\lambda-1)f^{n-\lambda-1}\delta_0^n t)^{1/n-\lambda-1}}. \tag{13}$$

Išvada. Nesunku pastebėti, kad kai $t \to t_{kr} = \frac{1}{(n-\lambda-1)f^{n-\lambda-1}\delta_0^n}$, tai $U(t) \to \infty$. Todėl nuo deformacijos pradžios praėjus baigtiniam laikui t_{kr}, valkšni plokštė tampa nestabili, t.y. jos įlinkiai pradeda neaprėžtai didėti. Jei šlyties deformacijos $\varepsilon_{xy} \neq 0$, tai gauname sudėtingesnę (9) lygtį, tačiau (12) ir (13) lygtys yra analogiškos. Todėl ir išvada apie plokštės stabilumą yra ta pati.

Literatūra

[1] А.С. Вольмиир, *Устойчивость упругих систем*, Физматгиз, М. (1963).

[2] Ю.Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, М. (1966).

[3] С.А. Шестериков, Устойчивость пластинок при ползучести по теории течения, *ГМТФ*, **5**, (1961).

The stability of the press plate by creep theory

A. Bartaševičius

According to creep theory incurves of pressed plate increasing during the time. It means that deformated plate is not stable.