LMD mokslo darbai, III tomas, 193–201

Kreivumo teorija atraminių elementų erdvėje Y_n

Jolita PAKALNYTĖ, Algimantas Pranas URBONAS (VPU)
el. paštas: urbonas@vpu.lt

Įvadas

Atraminių elementų erdvių kreivumo teorija buvo sukurta B.Laptevo [2], V. Blizniko [1] ir kitų geometrų. Plačiausi apibendrinimai atlikti V. Blizniko, kuris parodė, kad šių erdvių geometrijai vystyti turi būti duoti du fundamentalieji afininės sieties ir tiesinės sietės objektai.

Šiame darbe mes nagrinėjame atraminių elementų erdvę, kurioje atraminis objektas yra antros eilės diferencialinis geometrinis objektas. Įrodyta, kad šioje erdvėje tiesinės sieties objektas pilnai nusako erdvės geometriją.

1. Atraminių elementų erdvė Y_n

Tegul V_n yra n-matė klasės C^r diferencijuojama daugdara, kurią mes vadinsime baze (arba bazine erdve). Kiekviename daugdaros V_n taške $x\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ prijungsime objektą y_k. Šį objektą laikysime atraminiu objektu. Pora $\left(x^i, y_k\right)$ vadinama atraminiu elementu. Gautą atraminių elementų erdvę pažymėsime Y_n.

Šioje atraminių elementų daugdaroje nagrinėsime tokias koordinačių transformacijas:

$$\bar{x}^i = f^i(x^k), \tag{1.1}$$

iššaukiančias atitinkamą atraminio objekto y_k kitimą:

$$\bar{y}_i = g_i^k y_k + f_s^k g_{ki}^s, \tag{1.2}$$

kur

$$f_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad f_{jk}^i = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k}, \ldots$$
$$g_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}, \quad g_{jk}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}, \ldots, \quad (i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Jeigu erdvėje Y_n duotas diferencialinio-geometrinio objekto Γ_{ij} $(\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji})$ laukas, kurio komponentės transformacijų (1.1) ir (1.2) atveju kinta pagal taisyklę

$$\bar{\Gamma}_{ij} = g_i^k g_j^l \Gamma_{kl} - g_{ij}^p y_p - g_{ijp}^s f_s^p - f_{sp}^k g_{ki}^s g_j^p, \tag{1.3}$$

tai objektas $\Gamma_{ij}\,(x, y)$ vadinamas tiesine sietimi [1] erdvėje Y_n.

2. Sietys atraminių elementų erdvėje Y_n

Nustatysime vektorinių laukų invariantinį diferenciavimą taip, kad tenzoriaus diferencialas būtų tenzoriumi.

Vektorinio lauko $\xi^i(x, y)$, kurio komponentės kinta pagal dėsnį $\bar{\xi}^i = f^i_k \xi^k$, invariantinį diferencialą nustatysime objekto Γ^i_{kp} pagalba, kur

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial y_i}. \tag{2.1}$$

Rasime Γ^i_{jk} transformacijų dėsnį, jei koordinatės keičiamos (1.1) ir (1.2) dėsniais.

$$\bar{\Gamma}_{jk} = g^q_j g^l_k \Gamma_{ql} - g^p_{jk} y_p - g^r_{jp} g^t_k f^p_{rt} - f^p_s g^s_{jkp},$$

$$\bar{y}_i = g^t_i y_t + f^d_l g^l_{id},$$

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = -\frac{\partial \bar{\Gamma}_{jk}}{\partial \bar{y}_i} = -g^q_j g^l_k \frac{\partial \Gamma_{ql}}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial y_s}{\partial \bar{y}_i} + g^p_{jk} \cdot \frac{\partial y_p}{\partial \bar{y}_i} = g^q_j g^l_k f^i_s \Gamma^s_{ql} + g^p_{jk} f^i_p,$$

nes

$$y_i = f^t_i \bar{y}_t + g^d_l f^l_{id}, \quad \frac{\partial y_s}{\partial \bar{y}_i} = f^i_s.$$

Taigi, Γ^i_{jk} yra afininės sieties objektas. Vektorinio lauko $\xi^i(x, y)$ invariantinį diferencialą apibrėšime taip:

$$D\xi^i = d\xi^i + \xi^k \Gamma^i_{kp} dx^p. \tag{2.2}$$

Parodysime, kad $D\xi^i$ kinta pagal tenzorinį dėsnį:

$$\overline{D\xi^i} = f^i_k D\xi^k,$$

$$\begin{aligned}
\overline{D\xi^i} &= d\bar{\xi}^i + \bar{\xi}^k \bar{\Gamma}^i_{kp} d\bar{x}^p \\
&= \left(f^i_j \xi^j\right) + \left(f^k_s \xi^s\right) \left(g^t_k g^l_p f^i_r \Gamma^r_{tl} + f^i_l g^l_{kp}\right) \left(f^p_j dx^j\right) \\
&= f^i_j d\xi^j + \xi^j f^i_{jk} dx^k + f^i_r \xi^s \Gamma^r_{sl} dx^l + f^k_s f^i_l g^l_{kp} f^p_j \xi^s dx^j \\
&= f^i_k d\xi^k + f^i_k \Gamma^k_{ps} \xi^p dx^s = f^i_k D\xi,^k
\end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned}
&\xi^j f^i_{jk} dx^k + f^k_s f^i_l g^l_{kp} f^p_j \xi^s dx^j = \xi^s f^i_{sj} dx^j + f^k_s f^i_l g^l_{kp} f^p_j \xi^s dx^j \\
&= \xi^s dx^j \left(f^i_{sj} + f^k_s f^i_l f^p_j g^l_{kp}\right).
\end{aligned}$$

Be to, $\frac{\partial(\delta^i_k)}{\partial x^j} = 0$, tai $\frac{\partial(f^i_l g^l_k)}{\partial x^j} = f^i_{lj} g^l_k + f^i_l f^p_j g^l_{kp} = 0$.

Padauginus abi paskutinės lygybės puses iš f^k_s, turėsime:

$$f^i_{sj} + f^k_s f^i_l f^p_j g^l_{kp} = 0, \quad \text{t.y.} \quad f^i_{sj} + f^k_s f^i_l f^p_j g^l_{kp} = 0.$$

3. Pfafo išvestinės

Jeigu $f(x, y)$ yra C^2 klasės skaliarinė funkcija, apibrėžta Y_n, tai šios funkcijos invariantinio diferencialo tiesinės išraiškos per formas dx^i ir $\theta_k = dy_{ki} + \Gamma_{kij} dx^j$ koeficientai vadinami nagrinėjamos funkcijos Pfafo išvestinėmis.

Rasime šias išvestines.

Kadangi

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial y_k}\Gamma_{ks}\right) dx^s + \frac{\partial f}{\partial y_k}\theta_k,$$

tai įvedę pažymėjimus

$$\overset{\Gamma}{\partial_i} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial y_k}\Gamma_{ki},$$
$$\overset{\Gamma}{\partial^k} f = \frac{\partial f}{\partial y_k},$$

galėsime užrašyti

$$df(x, y) = \overset{\Gamma}{\partial_i} f dx^i + \overset{\Gamma}{\partial^k} f \theta_k.$$

$\overset{\Gamma}{\partial_i} f$ vadinsime pirmos rūšies išvestine, o $\overset{\Gamma}{\partial^k} f$ – antros rūšies. Jos yra tenzoriai.

Antrųjų pirmos rūšies Pfafo išvestinių alternavimas duoda:

$$2\overset{\Gamma}{\partial}_{[i} \overset{\Gamma}{\partial}_{j]} f = \overset{\Gamma}{\partial^k} f R_{ijk}, \tag{3.1}$$

kur

$$R_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{kj}}{\partial y_t}\Gamma_{ti} - \frac{\partial \Gamma_{ki}}{\partial y_t}\Gamma_{tj}. \tag{3.2}$$

Teorema. *Pirmosios Pfafo išvestinės ir R_{ijk} yra tenzoriai.*

Įrodymas. Iš skaliarinės funkcijos diferencialo formos invariantiškumo seka

$$df = \overset{\Gamma}{\underset{i}{\partial}} f dx^i + \overset{\Gamma}{\partial^k} f \theta_k = \overset{\bar{\Gamma}}{\partial_i} f d\bar{x}^i + \overset{\bar{\Gamma}}{\partial^k} f \bar{\theta}_k. \tag{3.3}$$

Kadangi (3.3) lygybė nepasikeičia kintant dx^i ir θ_k, tai

$$\underset{i}{\overset{\Gamma}{\partial}} f = f_i^j \overset{\bar\Gamma}{\partial}_j f, \tag{3.4}$$

$$\overset{\bar\Gamma}{\partial}{}^k f = g_p^k \overset{\bar\Gamma}{\partial}{}^p f. \tag{3.5}$$

Tokiu būdu, skaliarinės funkcijos pirmosios Pfafo išvestinės yra tenzoriai.
Parodysim, kad $\overset{\Gamma}{\partial}_{[i} \overset{\Gamma}{\partial}_{j]} f$ yra tenzorius.
Iš (3.4) gausime:

$$\begin{aligned}
\overset{\bar\Gamma}{\partial}_j \overset{\bar\Gamma}{\partial}_i f &= g_j^l \overset{\Gamma}{\partial}_l \overset{\bar\Gamma}{\partial}_i f = g_j^l \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\overset{\bar\Gamma}{\partial}_i f \right) - \overset{\Gamma}{\partial}{}^k \left(\overset{\bar\Gamma}{\partial}_i f \right) \Gamma_{kl} \right) \\
&= g_j^l \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \left(g_i^t \overset{\Gamma}{\partial}_t f \right) - \overset{\Gamma}{\partial}{}^k \left(\overset{\bar\Gamma}{\partial}_i f \right) \Gamma_{kl} \right) \\
&= g_{ij}^t \overset{\Gamma}{\partial}_t f + g_i^t g_j^l \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \overset{\Gamma}{\partial}_t f - \overset{\Gamma}{\partial}{}^k \overset{\Gamma}{\partial}_t \Gamma_{kl} \right) = g_{ij}^t \overset{\Gamma}{\partial}_t f + g_i^t g_j^l \overset{\Gamma}{\partial}_l f \overset{\Gamma}{\partial}_t f.
\end{aligned}$$

Analogiškai gausime:

$$\overset{\bar\Gamma}{\partial}_i \overset{\bar\Gamma}{\partial}_j f = g_{ij}^t \overset{\Gamma}{\partial}_t f + g_i^t g_j^l \overset{\Gamma}{\partial}_t \overset{\Gamma}{\partial}_l f.$$

Paėmę skirtumą, gausime:

$$\overset{\bar\Gamma}{\partial}_i \overset{\bar\Gamma}{\partial}_j f - \overset{\bar\Gamma}{\partial}_j \overset{\bar\Gamma}{\partial}_i f = g_i^t g_j^l \left(\overset{\Gamma}{\partial}_t \overset{\Gamma}{\partial}_l f - \overset{\Gamma}{\partial}_l \overset{\Gamma}{\partial}_t f \right). \tag{3.6}$$

Iš formulių (3.4), (3.5) ir (3.6) išplaukia, kad R_{ijk} taip pat tenzorius.

Tenzorius R_{ijk} vadinamas Y_n kreivumo tenzoriumi. Jeigu $R_{ijk} = 0$, tai pirmos rūšies antrosios Pfafo išvestinės yra simetrinės bet kokiai skaliarinei funkcijai. Šiuo atveju tiesinė sietis vadinama plokščia.

4. Kovariantinės išvestinės ir Riči tapatybės

Formulę (2.2) galima perrašyti tokiu būdu:

$$D\xi^i = \nabla_k \xi^i dx^k + \nabla^k \xi^i \theta_k, \tag{4.1}$$

kur

$$\nabla_k \xi^i = \overset{\Gamma}{\partial_k}\, \xi^i + \xi^p \Gamma^i_{pk}, \tag{4.2}$$

$$\nabla^k \xi^i = \overset{\Gamma}{\partial^k}\, \xi^i. \tag{4.3}$$

Dydžiai $\nabla_k \xi^i$ ir $\nabla^k \xi^i$ vadinami pirmos ir antros rūšies kovariantinėmis išvestinėmis. Analogiškai apibrėžiamos ir bet kokių tenzorių kovariantinės išvestinės.

Pvz.: $\nabla_k T^i_j = \overset{\Gamma}{\partial_k}\, T^i_j + T^p_j \Gamma^i_{pk} - T^i_p \Gamma^p_{jk}$.

Teorema. *Kovariantinės išvestinės $\nabla_k \xi^i$ ir $\nabla^k \xi^i$ yra tenzoriai.*

Įrodymas. Kadangi $D\xi^i$, dx^k ir θ_k yra tenzoriai, tai

$$D\bar{\xi}_i = f^i_k D\xi^k,$$

$$d\bar{x}^k = f^k_l dx^l, \tag{4.4}$$

$$\theta_k = g^i_k \theta_i, \tag{4.5}$$

$$\bar{\nabla}_k \bar{\xi}^i d\bar{x}^k + \bar{\nabla}^k \bar{\xi}^i \bar{\theta}_k = f^i_l \left(\nabla_k \xi^l dx^k + \nabla^k \xi^l \theta_k \right).$$

Įstačius į šią formulę atitinkamas (4.4) ir (4.5) išraiškas, gausime:

$$\bar{\nabla}_k \bar{\xi}^i d\bar{x}^k + \bar{\nabla}^k \bar{\xi}^i \bar{\theta}_k = f^i_l g^t_k \nabla_t \xi^l d\bar{x}^k + f^i_l f^k_t \nabla^t \xi^l \bar{\theta}_k.$$

Kadangi šios išraiškos turi būti patenkintos bet kokiems $d\bar{x}^k$ ir $\bar{\theta}_k$, tai

$$\bar{\nabla}_k \bar{\xi}^i = f^i_l g^t_k \nabla_t \xi^l, \tag{4.6}$$

$$\bar{\nabla}^k \bar{\xi}^i = f^i_l f^k_t \nabla^t \xi^l, \tag{4.7}$$

kas ir įrodo teoremą.

Kovariantinių vektorinio lauko antrosios eilės išvestinių alternavimas padeda gauti apibendrintas Riči tapatybes.

Kadangi

$$\nabla_k \xi^i = \overset{\Gamma}{\partial_k}\, \xi^i + \xi^p \Gamma^i_{pk}, \tag{4.8}$$

kur

$$\partial_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \quad \text{ir} \quad \partial^k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial y_k},$$

tai

$$
\begin{aligned}
\nabla_l\left(\nabla_k\xi^i\right) &= \overset{\Gamma}{\partial}_l\left(\nabla_k\xi^i\right) + \nabla_k\xi^s\Gamma^i_{sl} - \nabla_s\xi^i\Gamma^s_{kl} \\
&= \partial_l\left(\nabla_k\xi^i\right) - \partial^t\left(\nabla_k\xi^i\right)\Gamma_{tl} + \left(\overset{\Gamma}{\partial}_k\xi^s + \xi^p\Gamma^s_{pk}\right)\Gamma^i_{sl} - \nabla_s\xi^i\Gamma^s_{kl} \\
&= \partial_l\left(\partial_k\xi^i - \partial^v\xi^i\Gamma_{vk} + \xi^p\Gamma^i_{pk}\right) - \partial^t\left(\partial_k\xi^i - \partial^v\xi^i\Gamma_{vk} + \xi^p\Gamma^i_{pk}\right)\Gamma_{tl} \\
&\quad + \left(\partial_k\xi^s - \partial^u\xi^s\Gamma_{uk} + \xi^p\Gamma^s_{pk}\right)\Gamma^i_{sl} - \nabla_s\xi^i\Gamma^s_{kl} \\
&= \partial_l\partial_k\xi^i - \partial_l\partial^v\xi^i\Gamma_{vk} - \partial_l\Gamma_{vk}\partial^v\xi^i + \partial_l\xi^p\Gamma^i_{pk} + \xi^p\partial_l\Gamma^i_{pk} \\
&\quad - \left(\partial^t\partial_k\xi^i - \partial^t\partial^v\xi^i\Gamma_{vk} - \partial^v\xi^i\partial^t\Gamma_{vk} + \partial^t\xi^p\Gamma^i_{pk} + \partial^t\Gamma^i_{pk}\xi^p\right)\Gamma_{tl} \\
&\quad + \left(\partial_k\xi^s - \partial^u\xi^s\Gamma_{uk} + \xi^p\Gamma^s_{pk}\right)\Gamma^i_{sl} - \nabla_s\xi^i\Gamma^s_{kl} \\
&= \partial_l\partial_k\xi^i - \partial_l\partial^v\xi^i\Gamma_{vk} - \partial^v\xi^i\partial_l\Gamma_{vk} - \partial^t\xi^p\Gamma^i_{pk}\Gamma_{tl} - \xi^p\partial^t\Gamma^i_{pk}\Gamma_{tl} + \partial_k\xi^s\Gamma^i_{sl} \\
&\quad -\partial^u\xi^s\Gamma_{uk}\Gamma^i_{sl} + \xi^p\partial_l\Gamma^i_{pk} - \partial^t\partial_k\xi^i\Gamma_{tl} + \xi^p\Gamma^s_{pk}\Gamma^i_{sl} + \partial^v\xi^i\partial^t\Gamma_{vk}\Gamma_{tl} \\
&\quad +\partial^t\partial^v\xi^i\Gamma_{vk} - \partial^u\xi^s\Gamma_{uk}\Gamma^i_{sl} - \nabla_s\xi^i\Gamma^s_{kl}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_k\left(\nabla_l\xi^i\right) &= \partial_k\partial_l\xi^i - \partial_k\partial^v\xi^i\Gamma_{vl} - \partial^v\xi^i\partial_k\Gamma_{vl} - \partial^t\xi^p\Gamma^i_{pl}\Gamma_{tk} \\
&\quad -\xi^p\partial^t\Gamma^i_{pl}\Gamma_{tk} + \partial_l\xi^s\Gamma^i_{sk} - \partial^u\xi^s\Gamma_{ul}\Gamma^i_{sk} + \xi^p\partial_k\Gamma^i_{pl} - \partial^t\partial_l\xi^i\Gamma_{tk} \\
&\quad +\xi^p\Gamma^s_{pl}\Gamma^i_{sk} + \partial^v\xi^i\partial^t\Gamma_{vl}\Gamma_{tk} + \partial^t\partial^v\xi^i\Gamma_{vl} - \partial^u\xi^s\Gamma_{ul}\Gamma^i_{sk} - \nabla_s\xi^i\Gamma^s_{lk}.
\end{aligned}
$$

Alternuojant pagal indeksus k ir l, gausime:

$$
\begin{aligned}
&-2\nabla_{[k}\nabla_{l]}\xi^i = \nabla_l\nabla_k\xi^i - \nabla_k\nabla_l\xi^i \\
&= \xi^p\left(2\partial_{[l}\Gamma^i_{|p|\,k]} - 2\partial^t\Gamma^i_{p[k}\Gamma_{|t|\,l]} + 2\Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{|p|\,l]}\right) \\
&\quad -2\nabla_s\xi^i\Gamma^s_{[kl]} - \partial^t\xi^i\left(\partial_l\Gamma_{tk} - \partial_k\Gamma_{tl} - \partial^v\Gamma_{tk}\Gamma_{vl} + \partial^v\Gamma_{tl}\Gamma_{vk}\right).
\end{aligned}
$$

Tokiu būdu,

$$
2\nabla_{[l}\nabla_{k]}\xi^i = \xi^p R^i_{plk} - 2\nabla_s\xi^i R^s_{kl} - \partial^t\xi^i R_{tlk}, \tag{4.9}
$$

kur

$$
R^i_{plk} = 2\left(\partial_{[l}\Gamma^i_{|p|\,k]} - \partial^t\Gamma^i_{p[k}\Gamma_{|t|\,l]} + \Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{|p|\,l]}\right), \tag{4.10}
$$

$$
R^q_{kl} = \Gamma^q_{[kl]} \tag{4.11}
$$

ir

$$
R_{tlk} = 2\left(\partial_{[l}\Gamma_{|t|\,k]} + \partial^v\Gamma_{t[l}\Gamma_{|v|\,k]}\right). \tag{4.12}
$$

Tenzorius R^q_{kl} vadinamas erdvės Y_n sukimo tenzoriumi, o tenzorius R^i_{plk} – tos pačios erdvės afininės sieties kreivumo tenzoriumi.

Lygybės (4.9) yra erdvės Y_n Riči tapatybės.

5. Geodezinės kreivės erdvėje Y_n

Bet kokios kreivės

$$\begin{cases} x^i = x^i(t) \\ y_k = y_k(t) \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{5.1}$$

erdvėje Y_n liestinės vektorius τ turi pavidalą

$$\tau = \tau^i e_i + \tau_k e^k, \quad \text{kur} \quad \tau^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad \tau_k = \frac{dy_k}{dt} + \Gamma_{kl}\frac{dx^l}{dt}.$$

Apibrėžimas. *Kreivė (5.1) vadinama horizontaliąja, jei $\tau_k = 0$, t.y.*

$$\frac{dy_k}{dt} + \Gamma_{kl}\frac{dx^l}{dt} = 0. \tag{5.2}$$

Apibrėžimas. *Erdvės Y_n kreivę (5.1) vadinsime geodezine kreive, jeigu ji horizontali ir jos liestinės vektorius kovariantiškai pastovus (kovariantinė išvestinė lygi nuliui).*

Šios kreivės yra Finslerio erdvės kvazigeodezinių kreivių analogai [1]. Akivaizdu, kad erdvės Y_n geodezinės kreivės yra sprendiniai sistemos

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{lp}\dfrac{dx^l}{dt}\dfrac{dx^p}{dt} = 0, \\ \frac{dy_k}{dt} + \Gamma_{kl}\frac{dx^l}{dt} = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Iš čia seka, kad per duotą atraminį elementą (x^i_0, y^0_k) duotąja horizontaliąja kryptimi τ^i_0 eina vienintelė geodezinė kreivė. Pastebėsim, kad (5.3) diferencialinių lygčių sistema priklauso tik nuo afininio sąryšio Γ^i_{jk} objekto simetriškosios dalies. Be to, ši sistema yra invariantiška transformacijų $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^i)$, $\bar{y}_k = \bar{y}_k(y_k, f^i_j, f^i_{jp})$ atžvilgiu. Parametrą t galima keisti tiesiškai su koeficientais a ir b:

$$\tilde{t} = at + b.$$

Jeigu visos nagrinėjamos funkcijos yra C^ω klasės, tai (5.3) sistemos sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas

$$t = 0, \quad x^i = x^i_0, \quad y_k = y^0_k, \quad \frac{dx^i}{dt} = \tau^i_0,$$

galima parašyti laipsninių eilučių pavidalu. Laipsniškai diferencijuodami (5.3) lygybes pagal t, gausime tas eilutes. Tada turėsime tokią lygybių seką:

$$\frac{d^a x^i}{dt^a} + \Gamma^i_{i_1\ldots i_a}\frac{dx^{i_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{i_a}}{dt} = 0, \tag{5.4}$$

$$\frac{d^{a-1}y_k}{dt^{a-1}} + \Gamma_{ki_1\ldots i_{a-1}}\frac{dx^{i_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{i_{a-1}}}{dt} = 0, \quad (a = 3, 4, \ldots), \tag{5.5}$$

kur

$$\Gamma^i_{i_1\ldots i_{a+1}} = \partial_{(i_1}\Gamma^i_{i_2\ldots i_{a+1})} - a\Gamma^i_{l(i_1\ldots i_{a-1}}\Gamma^l_{i_a i_{a+1})} - \partial^p\Gamma^i_{(i_1\ldots i_a}\Gamma_{|p|i_{a+1})},$$
$$\Gamma_{ki_1\ldots i_{a+1}} = \partial_{(i_1}\Gamma_{|k|i_2\ldots i_{a+1})} - a\Gamma_{|kl|(i_1\ldots i_{a-1}}\Gamma^l_{i_a i_{a+1})} - \partial^p\Gamma_{k(i_1\ldots i_a}\Gamma_{|p|i_{a+1})}. \tag{5.6}$$

Tokiu būdu, (5.3) sistemos sprendinys yra tokio pavidalo:

$$x^i = x^i_0 + \tau^i_0 t - \sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\overset{o}{\Gamma}{}^i_{i_1\ldots i_a}\tau^{i_1}_0\ldots\tau^{i_a}_0\right)t^a, \tag{5.7}$$
$$y_k = y^0_k - \sum_{a=0}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\overset{o}{\Gamma}_{ki_1\ldots i_a}\tau^{i_1}_0\ldots\tau^{i_a}_0\right)t^a,$$

kur

$$\overset{o}{\Gamma}{}^i_{i_1\ldots i_a} = \Gamma^i_{i_1\ldots i_a}\big|_{t=0}, \quad \overset{o}{\Gamma}_{ki_1\ldots i_a} = \Gamma_{ki_1\ldots i_a}\big|_{t=0}.$$

Bazinėje erdvėje V_n atliksim tokį koordinačių pakeitimą $x \to \bar{x}$:

$$x^i = x^i_o + \bar{x}^i - \sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{a}\,\overset{o}{\Gamma}{}^i_{i_1\ldots i_a}\bar{x}^{i_1}\bar{x}^{i_a}. \tag{5.8}$$

Naujoje koordinačių $\bar{x}$ sistemoje lygybės (5.7) turės paprastą pavidalą:

$$\bar{x}^i = \tau^i_o t. \tag{5.9}$$

Taigi, eilučių (5.8) ir

$$y_k = y^o_k - \sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a}\Gamma^o_{ki_1\ldots i_a}\bar{x}^{i_1}\ldots\bar{x}^{i_a} \tag{5.10}$$

konvergavimo srityje per duotą atraminį elementą (x^i_o, y^o_k) kryptimi τ^i_o eina tik viena horizontalioji geodezinė kreivė. Koordinačių sistemą, kurioje (5.3) sistemos sprendinys turi (5.9) ir (5.10) pavidalą, vadinsime normaliąja koordinačių sistema, atitinkančia pradinę koordinačių sistemą ir duotą atraminį elementą.

Literatūra

[1] В.И. Близникас, К теории кривизны пространства опорных элементов, *Liet. Matem. Rink.*, 1(5), 9–24 (1965).

[2] Б.Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов, Уч. зап. Казанского ун-та, 4(118), 75–147 (1958).

La géométrie de l'espace des éléments d'appuis Y_n

J.Pakalnytė, A.P. Urbonas

L'espace Y_n des éléments d'appuis dont un élément dáppui est un objet du deuxième ordre. On dévelope la théorie de courbure de cet espace à connexion linéaire et on trouve des courbes géodésiques.