LMD mokslo darbai, III tomas, 125–131

Paskirstyto valdymo diskrečiųjų sistemų optimizavimas kvadratinio kokybės kriterijaus atžvilgiu

Nijolė JANUŠAUSKAITĖ (KTU)
el. paštas: nijole.janusauskaite@fmf.ktu.lt

Kvadratinių funkcionalų su tiesine trajektorija minimizavimo uždaviniai sudaro atskirą optimaliojo valdymo uždavinių klasę. Pirmieji šios srities uždaviniai buvo suformuluoti ir išspręsti nepriklausomai vienas nuo kito R. Kalmano ir A.M. Letovo 1950 metais. Patikimų automatinio reguliavimo sistemų kūrimas stimuliavo tolimesnį intensyvų šių uždavinių nagrinėjimą. Kadangi kvadratinių funkcionalų minimizavimo uždaviniai labai dažnai sutinkami automatinio reguliavimo teorijoje, todėl jie dar vadinami analizinio reguliatorių konstravimo teorijos uždaviniais.

Pagrindinius kvadratinių funkcionalų optimizavimo teorijos uždavinius galime suskirstyti į dvi grupes. Pirmajai grupei galima priskirti tuos, kuriuose konstruojami skaičiavimo algoritmai, o antrajai – tuos, kuriuose kuriami analiziniai sprendimo metodai. Pastarajai darbų grupei galime priskirti ir šį darbą.

Darbe dinaminio programavimo metodu sprendžiamas paskirstyto valdymo diskrečiųjų sistemų optimaliojo valdymo uždavinys su neišsigimusiu kvadratiniu kriterijumi. Optimaliojo valdymo struktūra bei minimalioji funkcionalo reikšmė nustatomos dalimis tolydžių funkcijų aibėje. Sprendimo bazę sudaro antros eilės Fredholmo lygties sprendinio egzistavimo ir Rikati tipo lygčių sistemos išsprendžiamumo klausimai.

Šis darbas apibendrina autorės rezultatus, gautus [1] darbe ir pratęstus [2] darbe. Kita vertus, kvadratinis kokybės kriterijus parinktas taip, kad savo forma sutaptų su funkcionalo, nagrinėjamo [2] darbe antrąja variacija.

Spręsime optimizavimo uždavinį: atkarpomis tolydžiųjų valdymų klasėje, rasti tokį valdymą, kuris minimizuotų kvadratinį funkcionalą:

$$\begin{aligned} I(u) = {} & x^T(t_1) M_1 x(t_1) + x^T(t_1) \sum_{s=-h}^{-1} M_2(s) x(t_1+s) \\ & + \sum_{s=-h}^{-1} \sum_{r=-h}^{-1} x^T(t_1+s) M_3(s,r) x(t_1+r) \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Bigg(x^T(t)\, Q_0(t)\, x(t) + x^T(t) \int_t^{t+1} Q_1(t,\sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma \\ & + \int_t^{t+1} u^T(\sigma)\, R(t,\sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma \Bigg), \end{aligned} \tag{1}$$

kai judėjimo trajektorija aprašoma diskrečiąja paskirstyto valdymo sistema:

$$x(t+1) = A_0(t)\,x(t) + \int_t^{t+1} B_0(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \qquad (2)$$

$$t \in \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\} = T,$$

$$x(t_0) = x_0. \qquad (3)$$

Čia $x(t) \in R^n$; $u(\sigma) \in R^m$; $A_0(t)$, M_1, $M_2(s)$, $M_3(s,r)$ – kvadratinės n-tosios eilės matricos, tenkinančios sąlygas

$$M_1 = M_1^T, \quad M_3(s,r) = M_3^T(r,s),$$
$$\forall s, r \in \{-1, -2, \ldots, -h\}, \; h \leqslant t_1 - t_0, \; Q_0(t) \geqslant 0,$$

$R(t,\sigma) > 0$ – simetrinės n-tosios eilės matricos; $Q_1(t,\sigma)$, $R(t,\sigma)$, $B_0(t,\sigma)$ – matricinės funkcijos, tolydžios σ atžvilgiu atkarpoje $[t, t+1)$, $t \in T$.

Šiose formulėse naudojami vektoriai yra vektoriai stulpeliai, o simboliu T žymima transponavimo operacija.

(1)–(3) uždavinį spręsime dinaminio programavimo metodu. Pirmiausia parašysime šio uždavinio Belmano lygtį:

$$B(t, y, \alpha(t-1), \ldots, \alpha(t-h)) = \min_u \Bigg[x^T(t)\,Q_0(t)\,x(t)$$
$$+ x^T(t) \int_t^{t+1} Q_1(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$
$$+ \int_t^{t+1} u'(\sigma)\,R(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + B\Bigg(t+1, A_0(t)\,x(t)$$
$$+ \int_t^{t+1} B_0(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \alpha(t), \ldots, \alpha(t-h+1)\Bigg)\Bigg], \quad \forall t \in T, \qquad (4)$$

su kraštine sąlyga

$$B(t_1, x(t_1), x(t_1-1), \ldots, x(t_1-h)) = x^T(t_1)\,M_1 x(t_1)$$
$$+ x(t_1) \sum_{s=-h}^{-1} M_2(s)\,x(t_1+s)$$
$$+ \sum_{s=-h}^{-1} \sum_{r=-h}^{-1} x^T(t_1+s)\,M_3(s,r)\,x(t_1+r). \qquad (5)$$

Čia $B(t, y, \alpha(t-1), \ldots, \alpha(t-h))$ – Belmano funkcionalas, kuris sutampa su minimaliąja kokybės kriterijaus reikšme, kai $x(t) = y$; y – bet koks n-matis vektorius; $\alpha(t-s) = x(t-s)$, $s \in \{1, 2, \ldots, h\}$ – bet koks n-mačių vektorių rinkinys.

Belmano funkcionalui parinksime tokią išraišką:

$$\begin{aligned}
&B(t, x(t), x(t-1), \ldots, x(t-h)) = x^T(t) L_1(t) x(t) \\
&\quad + x^T(t) \sum_{s=-h}^{-1} L_2(t, s)\, x(t+s) \\
&\quad + \sum_{s=-h}^{-1} \sum_{r=-h}^{-1} x^T(t+s)\, L_3(t, s, r)\, x(t+r),
\end{aligned} \tag{6}$$

čia $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ – nežinomos n-tosios eilės kvadratinės matricinės funkcijos, kurioms tinka sąryšiai:

$$\begin{aligned}
&L_1(t_1) = M_1; \quad L_2(t_1, s) = M_2(s), \\
&L_3(t_1, s, r) = M_3(s, r), \quad \forall s, r \in \{-h, -h+1, \ldots, -1\}, \\
&L_2(t, -(h+1)) = 0; \\
&L_3(t, s-h-1) = L_3^T(t, -h-1, s) = 0, \quad \forall t \in T \cup t_1.
\end{aligned}$$

(6) išraišką įrašę į (4) lygtį ir po tam tikrų pertvarkymų, gausime

$$\begin{aligned}
&x^T(t)\, L_1(t)\, x(t) + x^T(t) \sum_{s=-h}^{-1} L_2(t, s)\, x(t+s) \\
&\quad + \sum_{s=-h}^{-1} \sum_{r=-h}^{-1} x'(t+s)\, L_3(t, s, r)\, x(t+r) \\
&= x^T(t)\, \big(Q_0(t) + A_0^T(t)\, L_1(t+1) \\
&\quad + A_0(t) + A_0^T(t)\, L_2(t+1, -1) + L_2(t+1, -1)\, A_0(t) \\
&\quad + L_3(t+1, -1, -1)\big)\, x(t) \\
&\quad + \sum_{s=-h}^{-1} x^T(t)\, \big(A_0(t)\, L_2(t+1, s-1) + L_3(t+1, -1, s-1)\big)\, x(t+s) \\
&\quad + \sum_{s=-h}^{-1} \sum_{r=-h}^{-1} x^T(t+s)\, L_3(t+1)\; x(t+r) + \min_u \Phi(u, t).
\end{aligned}$$

kur

$$\Phi(u, t) = \int_t^{t+1} u^T(\sigma)\, R(t, \sigma)\, u(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$$

$$+x^T(t)\int_t^{t+1} A_0(t)\,L_1(t+1)\,u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + x^T(t)\int_t^{t+1} Q_1(t,\sigma)\,u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$
$$+\int_t^{t+1} u^T(\sigma)\,B_0^T(t,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,L_1(t+1)\int_t^{t+1} B_0(t,v)\,u(v)\,\mathrm{d}v$$
$$+\sum_{s=-h}^{-1}\int_t^{t+1} u^T(\sigma)\,B_0^T(t,\sigma)\,L_2(t+1,s-1)\,x(t+s)\,\mathrm{d}\sigma$$
$$+\int_t^{t+1} u^T(\sigma)\,B_0^T(t,\sigma)\,L_2(t+1,-1)\,x(t)\,\mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

Funkcija $\Phi(u,t)$ įgyja minimumą taške $u(t,\sigma)$, $\sigma \in [t,t+1)$, $t \in T$, kuris tinka Fredholmo lygčiai

$$u(t,\sigma) + \int_t^{t+1} M(t,\sigma,v)\,u(t,v)\,\mathrm{d}v = p(t,\sigma); \tag{8}$$

čia

$$M(t,\sigma,v) = R^{-1}(t,\sigma)\;B_0^T(t,\sigma)\;L_1(t+1)\;B_0(t,v)\,, \tag{9}$$

$$p(t,\sigma) = p_1(t,\sigma)\;x(t) + \sum_{s=-h}^{-1} p_2(t,s-1,\sigma)\;x(t+s)\,, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} p_1(t,\sigma) &= -R^{-1}(t,\sigma)\big(Q_1^T(t,\sigma) + B_0^T(t,\sigma)\,L_2(t+1,-1) \\ &\quad + B_0^T(t,\sigma)\,L_1(t+1)\,A_0(t)\big), \end{aligned} \tag{11}$$

$$p_2(t,s-1,\sigma) = -R^{-1}(t,\sigma)\,B_0^T(t,\sigma)\,L_2(t+1,s-1)\,. \tag{12}$$

(8) Fredholmo lygtis turi vienintelį sprendinį, kai $L_1(t) \geqslant 0$, $\forall t \in T \cup t_1$. Šį sprendinį galime užrašyti:

$$u^\circ(t,\sigma) = p(t,\sigma) + \int_t^{t+1} \Gamma(t,\sigma,v)\,p(t,v)\,\mathrm{d}v; \tag{13}$$

čia $\Gamma(t,\sigma,v)$ – rezolventė homogeninės integralinės lygties, atitinkančios (8) Fredholmo lygtį.

Pasinaudodami tuo, kad (8) lygties branduolys išsigimęs, randame rezolventę:

$$\Gamma(t,\sigma,v) = -R^{-1}(t,\sigma)\;B_0^T(t,\sigma)\;L_1(t+1)\;R_1^{-1}(t)\;B_0(t,v)\,, \tag{14}$$

$$R_1(t) = E + \int_t^{t+1} B_0(t,v)\, R^{-1}(t,v)\, B_0^T(t,v)\, L_1(t+1)\, dv. \tag{15}$$

Įrašę (9)–(12) ir (14)–(15) išraiškas į (13), po tam tikrų pertvarkymų, gauname:

$$u^\circ(t,\sigma) = p_3(t,\sigma)\, x(t) + \sum_{s=-h}^{-1} p_4(t,s,\sigma)\, x(t+s), \tag{16}$$

$$p_3(t,\sigma) = p_1(t,\sigma) + \int_t^{t+1} \Gamma(t,\sigma,v)\, p_1(t,v)\, dv, \tag{17}$$

$$p_4(t,s,\sigma) = p_2(t,s-1,\sigma) + \int_t^{t+1} \Gamma(t,\sigma,v)\, p_2(t,s-1,v)\, dv. \tag{18}$$

Toliau, (16) išraišką įrašę į (6) funkcionalą ir sulyginę kvadratinių formų atitinkamus koeficientus, funkcijų $L_1(t)$, $L_2(t,s)$, $L_3(t,s,r)$ atžvilgiu gauname rekurentinių matricinių Rikačio tipo lygčių sistemą:

$$\begin{aligned}
L_1(t) = {} & Q_0(t) + A_0^T(t)\, L_1(t+1)\, A_0(t) + L_3(t+1,-1,-1) \\
& + A_0(t)\, L_2(t+1,-1) + L_2^T(t+1,-1)\, A_0(t) \\
& + \int_t^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, R(t,\sigma)\, p_3(t,\sigma)\, d\sigma + \int_t^{t+1} Q_1(t,\sigma)\, p_3(t,\sigma)\, d\sigma \\
& + \int_t^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, Q_1^T(t,\sigma)\, p_3(t,\sigma)\, d\sigma \\
& + \int_t^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, L_1(t+1)\, A_0(t)\, d\sigma \\
& + \int_t^{t+1} A_0^T(t)\, L_1(t+1)\, B_0(t,\sigma)\, p_3(t,\sigma)\, d\sigma \\
& + \int_t^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, d\sigma L_1(t+1) \\
& + \int_t^{t+1} B_0(t,v)\, p_3(t,v)\, dv + \int_t^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, L_2(t+1,-1)\, d\sigma
\end{aligned}$$

$$+ \int_{t}^{t+1} L_2^T(t+1,-1)\, B_0(t,\sigma)\, p_3(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{19}$$

$$L_1(t_1) = M_1 \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}
L_2(t) = {} & Q_0(t) + A_0^T(t)L_1(t+1)A_0(t) \\
& + L_3(t+1,-1,-1) + A_0(t)L_2(t+1,-1) \\
& + L_2(t,s)A_0^T(t) + L_2(t+1,s-1) + L_3(t+1,-1,s-1) \\
& + \int_{t}^{t+1} Q_1(t,\sigma)\, p_4(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\
& + \int_{t}^{t+1} A_0^T(t)\, L_1(t+1)\, B_0(t,\sigma)\, p_4(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\
& + \int_{t}^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, R(t,\sigma)\, p_4(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\
& + \int_{t}^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, L_2(t+1,s-1)\, \mathrm{d}\sigma \\
& + \int_{t}^{t+1} L_2(t+1,-1) > B_0(t,\sigma)\, p_4^T(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\
& + \int_{t}^{t+1} p_3^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma L_1(t+1) \int_{t}^{t+1} B_0(t,v)\, p_4(t,v)\, \mathrm{d}v,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$L_2(t_1,s) = M_2(s), \quad \forall s \in \{-h, -h+1, \ldots, -1\},$$
$$L_2(t,-h-1) = 0, \quad \forall t \in T \cup t_1,$$

$$\begin{aligned}
L_3(t,s,r) = {} & \int_{t}^{t+1} p_4^T(t,\sigma)\, R(t,\sigma)\, p_4(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\
& + \int_{t}^{t+1} p_4^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, \mathrm{d}\sigma L_1(t+1) \int_{t}^{t+1} B_0(t,v)\, p_4(t,v)\, \mathrm{d}v \\
& + \int_{t}^{t+1} p_4^T(t,\sigma)\, B_0^T(t,\sigma)\, L_2(t+1,r-1)\, \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$+\int_{t}^{t+1} L_2^T(t+1, r-1)\, B_0(t,\sigma)\, p_4(t,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + L_3(t+1, s-1, r-1), \tag{21}$$

$$L_3(t_1, s, r) = M_3(s, r), \quad \forall s, r \in \{-h, -h+1, \ldots, -1\},$$
$$L_3(t, s, -h-1) = 0, \quad \forall t \in T \cup t_1.$$

Galutinai visus rezultatus apjungsime į vieną visumą teoremos forma.

Teorema 1. *Jei egzistuoja matricinės funkcijos* $L_1(t) \geqslant 0$, $L_2(t,s)$, $L_3(t,s,r)$, $t \in T$, $s, r \in \{-h, -h+1, \ldots, -1\}$, *kurios tinka* (19)–(21) *lygčių sistemai, tuomet egzistuoja* (1)–(3) *uždavinio optimalus valdymas* $u^0(t)$, *apibrėžiamas* (16)–(18) *lygybėmis, be to minimalioji kokybės kriterijaus reikšmė lygi* $x^T(t_0)\, L_1(t_0)\, x(t_0)$.

Suformuluosime (19)–(21) diskrečiųjų rekurentinių matricinių lygčių sistemos išsprendžiamumo pakankamas sąlygas.

Teorema 2. *Jei egzistuoja matricinės funkcijos* $A_1(t)$, $A_2(t,s)$, $\forall t \in T \cup t_1$, *kurios tenkina sąlygas:*

$$M_1 = A_1^T(t_1) \cdot A_1(t_1),$$
$$M_2(s) = A_1^T(t_1) \cdot A_2(t_1, s),$$
$$M_3(s,r) = A_2^T(t_1, s) \cdot A_2(t_1, r), \quad \forall s, r \in \{-h, \ldots, -1\},$$
$$\begin{Vmatrix} Q_0(t) & Q_1'(t,\sigma) \\ Q_1(t,\sigma) & R(t,\sigma) \end{Vmatrix} \geqslant 0, \quad \forall \sigma \in [t, t+1), \; t \in T,$$

tuomet egzistuoja vienintelis (19)–(21) *sistemos sprendinys.*

Teoremą galime įrodyti matematinės indukcijos metodu.

Literatūra

[1] Н. Янушаускайте, *Минимизация невырожденного квадратичного функционала вдоль траекторий с распределенным управлением*, ред. ж. Вестн. Белорус. ун-та, сер. 1. Физ. мат. мех., деп. в ВИНИТИ, No 9049-B88, p. 20 (1988).

[2] N. Janušauskaitė, Diskretusis maksimumo principas Bolco uždaviniui su paskirstytu valdymu, *Liet. Matem. Rink.*, **36**(21), 21–26 (1996) (rusų k.).

Optimization of distributed control discrete systems under the quadratic quality criterion

N. Janušauskaitė

The quadratic functional minimization problem was analysed. The motion trajectory was assumed to be discrete, the optimal control feedback was obtained.