LMD mokslo darbai, III tomas, 39–43

Landau formulė su svoriu

Audrius KAČĖNAS* (VU)
el. paštas: audrius.kacenas@maf.vu.lt

Tarkime $\zeta(s)$ yra kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ Rymano dzeta funkcija, kuri kompleksinėje pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ir likusioje srityje pasinaudojus analiziniu pratęsimu. Žinoma, kad visi funkcijos $\zeta(s)$ kompleksiniai nuliai $\varrho = \beta + i\gamma$ guli srityje $0 < \beta < 1$. Jeigu teisinga Rymano hipotezė, tada visiems kompleksiniams nuliams $\beta = 1/2$. Garsi Landau [1] formulė tvirtina, kad kiekvienam fiksuotam $x > 1$ turime

$$\sum_{0<\gamma\leq T} x^{\varrho} = -\frac{T}{2\pi}\Lambda(x) + \mathrm{O}(\log T),$$

kai $T \to \infty$; kur $\Lambda(x) = \log p$, jeigu $x = p^k$ ir $\Lambda(x) = 0$, jeigu $x \neq p^k$.

Mūsų uždavinys yra įrodyti šią teoremą

Teorema. *Tarkime $x > 1$ fiksuotas realus skaičius, ϱ – Rymano dzeta funkcijos kompleksinis nulis. Tada, kai $\delta \to 0_+$, turime*

$$\sum_{\varrho, \gamma>0} x^{\varrho} \mathrm{e}^{i\delta\varrho} = -\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} + \mathrm{O}(\log\delta).$$

Išvada. *Galiojant teoremos sąlygoms ir priėmus teisinga Rymano hipotezę, turime*

$$\sum_{\gamma>0} x^{i\gamma} \mathrm{e}^{-\delta\gamma} = -x^{-\frac{1}{2}}\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} + \mathrm{O}(\log\delta).$$

*Mokslinį darbą remia Lietuvos Mokslo ir studijų fondas.

Teoremos įrodymas. Tarkime $x, T > 1$ ir T nėra $\zeta(s)$ kompleksinio nulio ordinatė. Nagrinėsime kontūrinį integralą

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{2+i}^{2+iT} + \int\limits_{+2+iT}^{-1+iT} + \int\limits_{-1+iT}^{-1+i} + \int\limits_{-1+i}^{2+i} \right) \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{e}^{i\delta s} \mathrm{d}s \tag{1}$$

Pastebėsime, kad visiems kompleksiniams $\zeta(s)$ nuliams turime $\gamma > 14$, taigi remiantis Rezidiumų teorema, galime tvirtinti, kad

$$I = \sum_{0<\gamma\le T} x^{\varrho} \mathrm{e}^{i\delta\varrho}. \tag{2}$$

Norint gauti sumos (2) asimptotiką, turime įvertinti visus keturis formulės (1) integralus. Iš pradžių nagrinėkime integralą

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2+i}^{2+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{e}^{i\delta s}\, \mathrm{d}s. \tag{3}$$

Žinoma, kad absoliutaus konvergavimo srityje

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

Įstatydami šią išraišką į integralą (3) ir integruodami panariui, gauname

$$\begin{aligned} I_1 &= -\sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^2 \mathrm{e}^{2i\delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_1^T \left(\frac{x}{n}\right)^{it} \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{d}t \right) \\ &= -\mathrm{e}^{2i\delta} \Lambda(x) \frac{1}{2\pi\delta} (\mathrm{e}^{-\delta} - \mathrm{e}^{-\delta T}) + \mathrm{O}\left(\sum_{\substack{n=2 \\ n\ne x}}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{n^2} \right) \\ &= -\mathrm{e}^{2i\delta} \Lambda(x) \frac{1}{2\pi\delta} (\mathrm{e}^{-\delta} - \mathrm{e}^{-\delta T}) + \mathrm{O}(1). \end{aligned} \tag{4}$$

Pastebėkime, kad šioje vietoje naudojomės prielaida, jog $x > 1$ yra fiksuotas. Panašiu būdu įvertinsime integralą

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-1+iT}^{-1+i} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{e}^{i\delta s} \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Turėsime naudotis Rymano dzeta funkcijos funkcionaline lygtimi

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s). \tag{6}$$

Atlikdami integrale (5) kintamojo pakeitimą $s = 1 - z$, gauname

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i}^{2-iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s)x^{1-s}e^{i\delta(1-s)}ds. \tag{7}$$

Imdami (6) lygybės abiejų pusių logaritmines išvestines ir naudodamiesi Stirlingo formule, turime, kad

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(1-\sigma+it) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma - it) + \log\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

kur $t > 1$. Įstatydami paskutinę lygybę į (7) randame, kad

$$\begin{aligned} I_3 = {} & \frac{x^{-1}e^{-i\delta}}{2\pi}\int\limits_1^T x^{it}\frac{\zeta'}{\zeta}(2-it)e^{-\delta t}dt \\ & + \frac{x^{-1}e^{-i\delta}}{2\pi}\int\limits_1^T x^{it}e^{-\delta t}\log\frac{t}{2\pi}\,dt + O\left(\int\limits_1^T \frac{1}{t}e^{-\delta t}dt\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Pasinaudodami funkcijos $\frac{\zeta'}{\zeta}(2-it)$ Dirichlė eilutės išraiška ir integruodami panariui, gauname, kad pirmas (8) lygybės integralas yra aprėžtas dydžiu

$$\ll \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2\log n} \ll 1.$$

Akivaizdu, kad antrasis lygybės (8) integralas neviršija $O\left(\log\frac{1}{\delta}\right)$, kai $T \to \infty$. Liekamasis (8) narys trivialiai neviršija $O(1)$. Taigi, priimdami prielaidą, kad $T \to \infty$ ir $x > 1$ fiksuotas, turime

$$I_3 = O(\log\delta). \tag{9}$$

Trečias integralas iš formulės (1)

$$I_4 = \int\limits_{-1+i}^{2+i}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)x^s e^{i\delta s}ds = O(1), \tag{10}$$

nes funkcija $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ duotoje atkarpoje yra aprėžta.

Liko įvertinti integralą

$$I_2 = \int\limits_{2+iT}^{-1+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \mathrm{e}^{i\delta s} \mathrm{d}s.$$

Naudosimės įverčiu

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\gamma - T|<1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log T).$$

Pagal išankstinį pasirinkimą T nebuvo kompleksinio $\zeta(s)$ nulio ϱ ordinatė, bet jis gali būti kiek norima artimas kažkuriam ϱ. Kad to išvengti, konstruojame kontūrinį integralą

$$\int\limits_{2+iT}^{-1+iT} \frac{x^s}{s-\varrho} \mathrm{e}^{i\delta s} \mathrm{d}s = -2\pi i\, x^{\varrho} \mathrm{e}^{i\delta\varrho} u(\varrho) + \left(\int\limits_{2+iT}^{2+i(T+2)} + \int\limits_{2+i(T+2)}^{-1+i(T+2)} + \int\limits_{-1+i(T+2)}^{-1+iT} \right) \frac{x^s}{s-\varrho} \mathrm{e}^{i\delta s} \mathrm{d}s,$$

kur $u(\varrho) = 1$, jeigu $T < \gamma < T+1$, ir $u(\varrho) = 0$ visur kitur. Pastebėję, kad nulių skaičius srityje $T < \gamma < T+1$ yra $\mathrm{O}(\log T)$ ir, kad funkcija $\mathrm{e}^{i\delta\varrho}$ yra aproksimuojanti, kai $T \to \infty$, gauname

$$I_2 = \mathrm{O}(1). \tag{11}$$

Taigi, leisdami $T \to \infty$, iš formulių (1), (2), (4), (9), (10) ir (11) išvedame, kad

$$\sum_{\varrho, \gamma>0} x^{\varrho} \mathrm{e}^{i\delta\varrho} = -\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} + \mathrm{O}(\log\delta),$$

čia mes pasinaudojome prielaida, kad $\delta \to 0_+$. Jeigu priimsime teisinga Rymano hipotezę, tada $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ ir

$$\sum_{\gamma>0} x^{i\gamma} \mathrm{e}^{-\delta\gamma} = -\frac{\Lambda(x)}{2\pi\delta} x^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{O}(\log\delta).$$

Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] E. Landau, Über die Nullstellen der Zetafunction, *Math. Annalen*, **71**, 548–564 (1911).

Landau formula with a weight

A. Kačėnas

The Landau formula with a weight was considered. The explicit asymptotic formula for the concrete weight was proved.