Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 378–383

Vamzdžio su tekančiu skysčiu vidutinio greičio analizė, esant hidraulinei kliūčiai

Rimantas DIDŽGALVIS (LŽŪU), Antanas SUDINTAS (KTU),
Irena TIKNEVIČIENĖ (KTU)
el. paštas: anatanas.sudintas@fmf.ktu.lt

Hidraulinių vamzdynų eksploatacijoje dažnai sutinkamas atvejis, kai vamzdžio įlinkio ar posūkio vietoje ties vamzdžio sienele susidaro kietų nuosėdinių medžiagų sluoksnis, tampantis asimetrine hidrauline kliūtimi (žr. 1 pav.). Tokio pobūdžio kliūtys gali smarkiai pakeisti skysčio greičio epiūrą, vidutinę reikšmę, perstumia maksimalios reikšmės koordinatę y ašies atžvilgiu.

Literatūroje, pvz., [1, 2], kaip taisyklė, yra nagrinėjami simetrinių hidraulinių kliūčių atvejai, randama jų įtaka slėgio nuostoliams. Asimetrinių hidraulinių kliūčių įtaką labai svarbu nustatyti, kai jos susidaro vamzdžio įlinkio ar posūkio vietoje, t.y. ten, kur, esant impulsiniams srauto greičio pasikeitimams vamzdynų sistemoje, lokaliniai slėgio nuostoliai gali būti labai žymūs ir sukelti pavojų vamzdžio sienelėms.

Nagrinėjamas tolygus skysčio judėjimas išlenktame vamzdelyje, kuriame yra susidaręs nuosėdų sluoksnis.

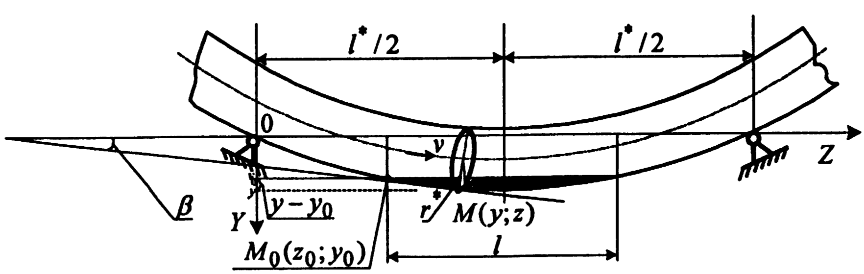
Vamzdžio spindulys yra r_0. Tolygus skysčio judėjimas vamzdyje vyksta sluoksniais, kurie pjūvyje vaizduojami koncentriniais apskritimais su centru vamzdžio simetrijos ašyje.

Tada bet kuriame vamzdžio pjūvyje skysčio greitis bus apskritimo spindulio funkcija

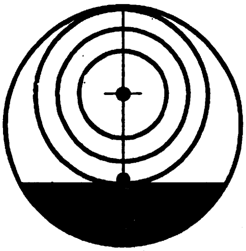
$$u = f(r).$$

Pagrindinė tolygaus judėjimo lygtis yra tokia:

$$\frac{\tau}{\gamma} = Ri, \tag{1}$$



1 pav.



[b]

2 pav.

čia $R = \frac{\omega}{\chi}$ – hidraulinis spindulys, χ – drėkinimo perimetras, ω – srauto skerspjūvio plotas; $i = \frac{\Delta p}{l}$ – hidraulinis nuolydis, čia Δp – hidrostatinis slėgis, l – vamzdžio atkarpos ilgis, τ – tangentiniai įtempimai ties sienele, γ – skysčio tūrio vieneto svoris.

Esant hidraulinei kliūčiai, yra pakankamai tikėtina, kad tolygų skysčio judėjimą vamzdžio pjūvyje, statmeno jo simetrijos ašiai, galima interpretuoti taip: sluoksnių centras pakils į viršų dydžiu $\frac{r^*}{2}$ (žr. 2 pav.), kur r^* – nuosėdų aukštis pjūvyje, ir sluoksniai išsidėstys koncentriniais apskritimais su pakilusiu į viršų centru.

Paskutinio tokio sluoksnio spindulys bus $r_0 - \frac{r^*}{2}$. Apskaičiuosime šiam atvejui funkciją $u = f(r)$.

Nagrinėsime trumpą $\mathrm{d}l$ ilgio vamzdžio cilindrą. Tegul slėgio pokytis tame cilindre yra $\mathrm{d}p$.

Kadangi $\tau = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = -\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$, tai skysčio judėjimo lygtis (1) užrašoma taip:

$$\mathrm{d}u = -\frac{\gamma \mathrm{d}p}{2\mu \mathrm{d}l} r \mathrm{d}r,$$

kur μ – klampumo koeficientas.

Integruodami gauname

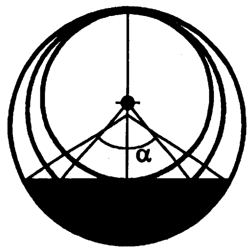
$$u = -\frac{\gamma \mathrm{d}p}{4\mu \mathrm{d}l} r^2 + \frac{\gamma \mathrm{d}p}{4\mu \mathrm{d}l}\left(r_0 - \frac{r^*}{2}\right)^2 + u^*,$$

u^* – paskutinio skysčio sluoksnio, kurio reikšmė kol kas nežinoma, greitis. Kai $r = 0$, skysčio greitis yra maksimalus ir lygus

$$u_{\max} = \frac{\gamma \mathrm{d}p}{4\mu \mathrm{d}l}\left(r_0 - \frac{r^*}{2}\right)^2 + u^*.$$

Darome prielaidą, kad kiti skysčio sluoksniai formuojasi perimetru, kurio didesnė dalis yra apskritimas, o mažesnė – atkarpa (žr. 3 pav.). Šiuo atveju hidraulinis spindulys R bus apskritimų spindulio r funkcija ir apskaičiuojamas taip:

$$R(r) = \frac{\omega}{\chi} = \frac{r^2\left(\pi - \frac{\pi\alpha}{360} + \frac{\sin\alpha}{2}\right)}{r\left(2\pi - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{3}tg\,\frac{\alpha}{4}} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)},$$



3 pav.

$$\alpha = 2 \arccos \frac{2r_0 - r^* - r}{r}.$$

Skysčio judėjimo lygtis užrašoma taip:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{\gamma \mathrm{d}p}{\mu \mathrm{d}l} R(r).$$

Integruodami šią lygtį, gauname

$$u - u^* = \frac{\gamma \mathrm{d}p}{\mu \mathrm{d}l} \int\limits_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r} R(r)\mathrm{d}r.$$

Skysčio greitį u^* apskaičiuojame pasinaudoję kraštine sąlyga $u\big|_{r=r_0} = 0$.

$$u^* = \frac{\gamma \mathrm{d}p}{\mu \mathrm{d}l} \int\limits_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r_0} R(r)\mathrm{d}r.$$

Vidutinis skysčio greitis

$$V = \frac{Q}{\omega} = \int\limits_{\omega} u \mathrm{d}\omega,$$

kur ω – pjūvio plotas, Q – skysčio debitas.

Pirmu atveju (2 pav.) skysčio debitą apskaičiuojame taip:

$$Q_1 = \int\limits_{\omega} u \mathrm{d}\omega = \int\limits_{0}^{r_0 - \frac{r_*}{2}} \left(-\frac{\gamma \mathrm{d}p}{4\mu \mathrm{d}l} r^2 + \frac{\gamma}{4\mu} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l} \left(r_0 - \frac{r^*}{2} \right)^2 + u^* \right) 2\pi r \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\gamma \mathrm{d}p \pi}{8\mu \mathrm{d}l} \left(r_0 - \frac{r^*}{2} \right)^4 + \pi u^* \left(r_0 - \frac{r^*}{2} \right)^2.$$

Vidutinis greitis užrašomas taip:

$$V_1 = \frac{Q_1}{\omega_1};$$

ir

$$\omega = \pi \left(r_0 - \frac{r^*}{2} \right)^2 .$$

Skaičiuojame vidutinį greitį antru atveju (3 pav.). Skysčio debitas šiuo atveju skaičiuojamas taip:

$$Q_2 = \int\limits_{\omega} u \mathrm{d}\omega = \int\limits_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r_0} \left(-\frac{\gamma \mathrm{d}p}{\mu \mathrm{d}l} \int\limits_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r_0} R(r)\mathrm{d}r + u^* \right) \mathrm{d}\omega,$$

$$\mathrm{d}\omega = \left(2\pi r - r \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right) \right.$$
$$\left. + r^2 \left(\frac{\pi}{180} - \cos\alpha \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2r_0 - r^* - r}{r} \right)^2}} \cdot \frac{r^* - 2r_0}{r^2} \right) \mathrm{d}r. \tag{2}$$

Vidutinis greitis

$$V_2 = \frac{Q_2}{\omega_2};$$

ir

$$\omega_2 = \pi r^2 - \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right).$$

Vamzdžio įlinkio linijos lygtis užrašoma taip:

$$y = pz(l^* - z), \tag{3}$$

kur l^* – įlinkio stygos ilgis, p – kreivės parametras.

Parametras p apskaičiuojamas, pasinaudojant žinoma informacija apie vamzdžio įlinkio kreivumą:

$$p = \frac{1}{2\rho},$$

kur ρ – vamzdžio kreivumo spindulys.

Nuosėdų aukštis r^* vamzdžio pjūvyje taške $M(y,z)$ apskaičiuojamas taip (1 pav.):

$$r^* = \frac{y - y_0}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{y - y_0}{\cos\beta}. \tag{4}$$

Pasinaudoję (3), (4) užrašome taip:

$$r^* = \frac{pz(l^* - z) - y_0}{\cos\beta}.$$

Kadangi

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

tai

$$r^* = (pz(l^* - z) - y_0)\sqrt{1 + p^2(l^* - 2z)^2}.$$

Konkrečiu skysčio tekėjimo atveju debitas yra žinomas pastovus dydis Q^*. Tada

$$Q_1 + Q_2 = Q^*. \tag{5}$$

Įstačius į (5) Q_1 ir Q_2 išraiškas, gausime

$$\frac{\gamma}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}l}\cdot g(z) = Q^*, \tag{6}$$

$$g(z) = \frac{\pi}{8}\left(r_0 - \frac{r^*}{2}\right)^4 + \pi\int_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r_0} R(r)\mathrm{d}r - \int_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r_0}\left(\int_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r} R(r)\mathrm{d}r + \int_{r_0 - \frac{r^*}{2}}^{r_0} R(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\omega,$$

kur $\mathrm{d}\omega$ išraiška yra (2). Integruodami (6) diferencialinę lygtį, apskaičiuojame slėgio kitimo priklausomybę nuo nuosėdų aukščio. Lanko diferencialas

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}z = \sqrt{1 + p^2(l^* - 2z)^2}\mathrm{d}z. \tag{7}$$

Įstatome (7) į (6) ir integruodami gauname

$$p = \frac{Q^*\mu}{\gamma}\int_{z_0}^{z}\frac{\sqrt{1 + p^2(l^* - 2z)^2}}{g(z)}\mathrm{d}z + p_0,$$

p_0 – skysčio slėgis pjūvyje taške $M(z_0, y_0)$.

Išvados

Atliktas vamzdžiu tekančio skysčio srauto vidutinio greičio skaičiavimas, esant asimetrinei kliūčiai. Skaičiavimams priimta, kad srauto maksimalaus greičio koordinatė persislenka proporcingai kliūties storiui. Gautos analitinės vidutinio greičio išraiškos įvertina jo kitimą pagal srauto ir kliūties sąveikos plotą, t.y. pagal hidraulinio spindulio R kitimą bei kliūties (nuosėdų) storį. To pasekoje apskaičiuota vidutinė srauto greičio reikšmė ir pagal ją nustatomi slėgio nuostoliai yra žymiai tikslesni.

Literatūra

[1] П.Г. Киселев, *Гидравлика*, Госэнерго издат, Москва (1963).
[2] М.Е. Дейч, А.Е. Зарякин, *Гидрогазодинамика*, Энергоиздат (1984).

Analysis of an average velocity of a pipe with flowing fluid in case of a hydraulic obstacle

R. Didžgalvis, A. Sudintas, I. Tiknevičienė

Calculation of average velocity of a fluid flow inside a pipe with an asymmetrical obstacle was carried out. Calculations consider flow maximum velocity co-ordinate to move in proportion with the obstacle thickness. The obtained analytical average velocity expressions evaluate its change in accordance with the area of flow and obstacle interaction, i.e., in accordance with the change of hydraulic radius R and the obstacle (sediment) thickness. According to this, an average meaning of flow velocity is calculated, and pressure losses determined under it are considerably more precise.