Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 172–175

Apie vienos hiperplokštuminių elementų erdvių klasės maksimalų judrumą

Algimantas Pranas URBONAS (VPU)
el. paštas: urbonas@vpu.lt

1. Įvadas

Vienas iš pagrindinių judesių teorijos klausimų yra maksimalaus judrumo nustatymas ir lakunų erdvės judesių grupių eilėse suradimas.

Pastebėsime, kad didėjant erdvės matavimui didėja ir „draudžiamų" intervalų (lakunų) ilgiai. Beje, didėjant erdvės matavimui, gali atsirasti ir naujos lakunos. Šiuo metu yra žinoma tik dalis šių intervalų net tokiose giliai ištirtose Rymano, afininės sieties bei Finslerio erdvėse. Visų lakunų suradimo problema n-matėje erdvėje laukia savo sprendimo. Dar mažiau šie klausimai ištirti apibendrintose erdvėse.

2. Judesiai hiperplokštuminių elementų erdvėje

Tegul U_n – hiperplokštuminių elementų erdvė [1], kurios taško lokalines koordinates žymėsime (x^i, u_k) $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Šioje erdvėje duotas fundamentalus diferencialinis objektas $\Gamma_{ij}(x, u)$ $(\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji})$, kurį vadinsime tiesine sietimi [1]. Šis objektas indukuoja afininę sietį erdvėje U_n:

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial u_i}. \tag{1}$$

Tenzorius

$$R_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial u_p}\Gamma'_{pj} - \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x^p}\Gamma_{pk}. \tag{2}$$

vadinamas erdvės U_n kreivumo tenzoriumi.

Infinitezimalią transformaciją $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\partial t$ vadinsime judesiu erdvėje, jei $v^i(x)$ tenkina diferencialinių lygčių sistemą

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma_{ij} = 0, \tag{3}$$

kur $\underset{v}{\mathcal{L}}$ – Li išvestinė vektoriaus $v^i(x)$ atžvilgiu.

(3) sistemos integruojamumo sąlygos surastos [1].

3. Vienos U_n erdvių klasės maksimalus judrumas

Šiame darbe mes nagrinėsime judesius erdvių U_n, kurių fundamentalusis objektas yra pavidalo

$$\Gamma_{ij}(x,u) = C(x,u)u_i u_j \quad (C(x,u) \neq 0). \tag{4}$$

Čia C(x,u) yra (-1) eilės homogeninė funkcija kintamųjų u_k atžvilgiu.

Darbe [2] buvo įrodyta, kad jei erdvė U_n leidžia judesių grupę G_r, $r > n^2 - n + 1$, tai funkcija $C(x,u)$ turi tenkinti diferencialinių lygčių sistemą

$$\frac{\partial^2 C(x,u)}{\partial u_i\, \partial u_j} = \frac{2}{C(x,u)} \cdot \frac{\partial C(x,u)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial C(x,u)}{\partial u_j}. \tag{5}$$

Be to, erdvė turi būti nulinio kreivumo, t.y.

$$R_{ijk} = 0. \tag{6}$$

Pateikiame (5) sistemos sprendimą.

Pakeisime nežinomą funkciją $C(x,u)$ funkcija $H(x,u) = \frac{1}{C(x,u)}$. Tada

$$\frac{\partial C(x,u)}{\partial u_i} = -\frac{1}{H^2(x,u)} \cdot \frac{\partial H(x,u)}{\partial u_i},$$

$$\frac{\partial^2 C(x,u)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{2}{H^3(x,u)} \cdot \frac{\partial H(x,u)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial H(x,u)}{\partial u_j} - \frac{1}{H^2(x,u)} \cdot \frac{\partial^2 H(x,u)}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Įrašę šias išraiškas į (5) lygčių sistemą, gausime

$$\frac{\partial^2 H(x,u)}{\partial u_i \partial u_j} = 0. \tag{7}$$

Akivaizdu, kad (7) sistemos sprendinys yra

$$H(x,u) = a^i(x) u_i. \tag{8}$$

Grąžinę ankstesnius pažymėjimus, turime

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{a^k(x) u_k} u_i\, u_j. \tag{9}$$

Iš (9), (2) ir (6) išplaukia diferencialinių lygčių sistema, kur nežinomos funkcijos yra $a^i(x)$:

$$\left(\frac{\partial a^s(x)}{\partial x^i} u_j - \frac{\partial a^s(x)}{\partial x^j} u_i \right) u_s = 0. \tag{10}$$

Išdiferencijavę šią lygtį pagal u_k, o po to pagal u_p, gausime:

$$\frac{\partial a^k(x)}{\partial x^i}u_j - \frac{\partial a^k(x)}{\partial x^j}u_i + \frac{\partial a^s(x)}{\partial x^i}u_s\delta^k_j - \frac{\partial a^s(x)}{\partial x^j}u_s\delta^k_i = 0,$$

$$\frac{\partial a^k(x)}{\partial x^i}\delta^p_j - \frac{\partial a^k(x)}{\partial x^j}\delta^p_i + \frac{\partial a^p(x)}{\partial x^i}\delta^k_j - \frac{\partial a^p(x)}{\partial x^j}\delta^k_i = 0.$$

Sumuodami lygtis pastarojoje sistemoje pagal indeksus p ir j, turėsime

$$\frac{\partial a^k(x)}{\partial x^i} = \frac{1}{n}\frac{\partial a^p(x)}{\partial x^p}\delta^k_i.$$

Šią sistemą galima užrašyti šitaip:

$$\frac{\partial a^k(x)}{\partial x^i} = b(x)\delta^k_i, \tag{11}$$

kur

$$b(x) = \frac{1}{n}\frac{\partial a^p(x)}{\partial x^p}.$$

(11) sistemos integruojamumo sąlygos duoda

$$\frac{\partial b(x)}{\partial x^j}\delta^k_i = \frac{\partial b(x)}{\partial x^i}\delta^k_j.$$

Susumavę pagal k ir j, gauname

$$(n-1)\cdot\frac{\partial b(x)}{\partial x^i} = 0. \tag{12}$$

Dabar nagrinėsime du atvejus: $n = 1$ ir $n \neq 1$. Jei $n = 1$, tai lygčių sistema (12), o tuo pačiu ir (10) yra patenkintos tapatybiškai, todėl tiesinės sieties objektas turi vienintelę komponentę

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{a(x)}\cdot u. \tag{13}$$

Šiuo atveju, šis objektas indukuoja afininę sietį nepriklausančią nuo atraminio objekto ir erdvės kreivumas yra nulinis. Tokios erdvės judrumas yra maksimalus (n^2+n) ir lygus 2. Kai $n \neq 1$, tai iš (12) sistemos išplaukia

$$\frac{\partial b(x)}{\partial x^i} = 0,$$

arba $b(x) = b = \text{const}.$

Turėdami omenyje šį faktą ir integruodami (11) sistemą, gauname

$$a^k(x) = bx^k + b^k, \quad b^k = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Šiuo atveju, tiesinės sieties objektas (9) yra

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{(bx^k + b^k)u_k} \cdot u_i u_j. \tag{14}$$

Spręsdami (3) lygčių sistemą su (14) tiesine sietimi gauname n^2 parametrų turinčią judesių grupę, kurios operatoriai yra

$$\left\{ \left(x^i + \frac{1}{b} b^i \right) p_j \right\}, \quad \text{jei } b \neq 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{ir}$$

$$\left\{ p_i, \left(x^\alpha - \frac{1}{b^r} b^\alpha x^r \right) p_j \right\},$$

$$\text{jei } b = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, r-1, r+1, \dots, n).$$

Čia $b^r \neq 0$ yra viena iš nelygių nuliui b^k komponenčių, nes $\sum\limits_{k=1}^{n} (b^k)^2 \neq 0$.

Anksčiau pateikti įrodymai leidžia formuluoti teoremą.

Teorema. *Erdvės* U_n *su* (4) *tiesine sietimi maksimalus judrumas yra* 2, *kai* $n = 1$ *ir* n^2, *kai* $n \neq 1$.

Literatūra

[1] A.P. Urbonas, Les mouvements dans l'espace des éléments hyperplaniques à connexion linéaire, *Liet. Matem. Rink.*, **36**(4), 530–534 (1996).

[2] A.P. Urbonas, Deuxième lacune dans les ordres des groupes des mouvements des espaces U_n, *Liet. Matem. Rink.*, atiduotas spaudai (2000).

Sur la mobilité maximale d'une classe des espaces des éléments hyperplaniques

A.P. Urbonas

On étudie une classe des espaces des éléments hyperplaniques et on démontre que la mobilité maximale de cette classe des espaces est égale à 2, si $n = 1$ et à n^2, si $n \neq 1$.