Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 93–96
© 2000 Matematikos ir informatikos institutas

# Pilnoji metrika trūkių funkcijų erdvėje

Rimas BANYS (VGTU)
*el. paštas: ulijona@takas.lt*

Pažymėkime $D = D[0,1]$ gerai žinomą erdvę funkcijų, apibrėžtų intervale [0,1], kurios yra tolydžios iš dešinės ir turi ribas iš kairės. Šioje erdvėje apibrėšime dvi metrikas: jei $x, y \in D$ tai

$$s(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(\lambda(t))| + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda(t)-t|\right\}$$

ir

$$d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(\lambda(t))| + \sup_{s\neq t}\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right\},$$

kur apatinis rėžis imamas pagal visas tolydžias didėjančias funkcijas $\lambda$, apibrėžtas intervale [0,1], kurios tenkina sąlygas $\lambda(0) = 0$ ir $\lambda(1) = 1$. Tokių funkcijų aibę žymėsime $\Lambda$. Metrikos $s$ ir $d$ yra ekvivalenčios, o $(D, d)$ yra pilna separabeli metrinė erdvė. Topologija, kurią generuoja metrikos $s$ ir $d$, vadinama Skorochodo topologija (žr. [1]).

Funkcijos $x \in D$ svyravimą intervale $[a, b) \subset [0, 1]$ žymėsime $w_x[a, b)$, t.y.

$$w_x[a,b) = \sup\{|x(s)-x(t)| : s,t \in [a,b)\}.$$

Jei $x \in D$ ir $0 < \delta < 1$, pažymėkime

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}}\max_{1\leqslant i\leqslant r} w_x[t_{i-1}, t_i),$$

kur apatinis rėžis imamas pagal visus baigtinius intervalo $[0, 1]$ taškų rinkinius $\{t_i\}$, tenkinančius sąlygas

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1 \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \quad i = 1, \ldots, r. \end{cases}$$

Apibrėžkime funkciją $m_x(u) = w'_x(\mathrm{e}^u)$, kai $u < 0$, ir $m_x(u) = w'_x(1)$, kai $u \geqslant 0$. Ši funkcija yra nemažėjanti ir tolydi iš dešinės visoje skaičių tiesėje.

Kiekvienam $\alpha > 0$ pažymėkime

$$D_\alpha = \left\{x \in D : \int_{-\infty}^{\infty} m_x(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u < \infty\right\}.$$

Panaudodami erdvės $D$ metrikas $s$ ir $d$, įvesime erdvėje $D_\alpha$ dvi ekvivalenčias metrikas, kurios yra stipresnės negu metrikos $s$ ir $d$. Jei $x, y \in D_\alpha$, apibrėšime

$$s_\alpha(x,y) = s(x,y) + L_\alpha(x,y)$$

ir

$$d_\alpha(x,y) = d(x,y) + L_\alpha(x,y),$$

kur

$$L_\alpha(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} |m_x(u) - m_y(u)|\, \mathrm{e}^{-\alpha u} du.$$

Kadangi $L_\alpha$ yra metrika, tai $s_\alpha$ ir $d_\alpha$ taip pat yra metrikos. Akivaizdu, kad jos yra ekvivalenčios ir stipresnės negu atitinkamai metrikos $s$ ir $d$.

**Teorema 1.** *$(D_\alpha, d_\alpha)$ yra pilna separabili metrinė erdvė.*

*Įrodymas.* Įrodysime, kad metrika $d_\alpha$ yra pilnoji. Tarkime, kad $x_n \in D_\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$, yra $d_\alpha$-fundamentali seka. Kadangi $d$ yra pilnoji metrika, tai egzistuoja funkcija $x \in D$ tokia, kad $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Kadangi seka $x_n$ yra $d$-kompaktiška, tai (žr. [1])

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_n w'_{x_n}(\delta) = 0$$

arba, ekvivalentiškai,

$$\lim_{u \to -\infty} \sup_n m_{x_n}(u) = 0.$$

Todėl $x \in D_\alpha$ ir

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |m_x(u) - m_{x_n}(u)|\, \mathrm{e}^{-\alpha u} du = 0.$$

Vadinasi, $d_\alpha(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Erdvės pilnumas įrodytas.

Erdvės $(D_\alpha, d_\alpha)$ separabilumui įrodyti pakanka pastebėti, kad funkcijos, įgyjančios racionalias reikšmes intervaluose $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$, sudaro šios erdvės separantę.

**Teorema 2.** *Erdvės $(D_\alpha, d_\alpha)$ poaibis $A$ turi kompaktišką uždarinį tada ir tik tada, kai*

$$\sup_{x \in A} \sup_t |x(t)| < \infty \tag{1}$$

*ir*

$$\lim_{a\to-\infty}\sup_{x\in A}\int_{-\infty}^{a} m_x(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u = 0. \tag{2}$$

*Įrodymas.* Jei teoremos sąlygos patenkintos, tai $A$ yra sąlyginai kompaktiška erdvėje $(D,d)$ (žr. [1]). Todėl iš kiekvienos sekos $x_n \in A$, $n = 1,2,\ldots$,, galima išskirti konverguojantį erdvėje $(D,d)$ posekį $x_{n'}$. Jei $x_{n'}$ konverguoja į $x$, t.y., $d(x,x_{n'}) \to 0$, tai iš (2) išplaukia, kad $x \in D_\alpha$ ir $L_\alpha(x,x_{n'}) \to 0$. Vadinasi, $d(x,x_{n'}) \to 0$. Teoremos sąlygų pakankamumas įrodytas.

Įrodysime būtinumą. Jei aibė $A$ yra sąlyginai kompaktiška erdvėje $(D_\alpha, d_\alpha)$, tai ji yra sąlyginai kompaktiška ir erdvėje $(D,d)$, kadangi metrika $d$ yra silpnesnė negu $d_\alpha$. Todėl (1) turi būti patenkinta. Jei nebūtų patenkinta (2), tai egzistuotų skaičių seka $a_n \to -\infty$, seka $x_n \in A$ ir skaičius $\varepsilon > 0$ tokie, kad galiotų nelygybės

$$\int_{-\infty}^{a_n} m_{x_n}(u)\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u > \varepsilon, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Iš sekos $x_n$ išrinkę posekį $x_{n'}$, konverguojantį į kokią nors funkciją $x \in D_\alpha$, gautume lygybę

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |m_{x_{n'}}(u) - m_x(u)|\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u = 0.$$

Bet kadangi $x \in D_\alpha$, pastaroji lygybė prieštarauja (3). Taigi būtinumas taip pat įrodytas.

Erdvės $D_\alpha$ Borelio aibių $\sigma$-algebra $\mathcal{B}_\alpha$ sutampa su $\sigma$-algebra, kurią generuoja atvaizdžiai $\pi_t : x \to x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (žr. [2], Lema 3.1). Dar daugiau, nesunku įsitikinti, kad erdvėje $D_\alpha$ galioja ir stipresnis tvirtinimas, analogiškai kaip ir erdvėje $D$ (žr. [1], Teorema 14.5), kurį dabar suformuluosime. Jei $T \in [0,1]$, pažymėkime $\mathcal{F}_T$ aibės $D_\alpha$ poaibių algebrą, kurią sudaro aibės $\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}(B)$, kur $k$ yra bet koks natūralusis skaičius, $t_i \in T$, $i = 1,\ldots,k$ $B$ yra $k$-matės euklidinės erdvės Borelio aibė, o $\pi_{t_1\ldots t_k}(x) = (x(t_1),\ldots,x(t_k))$, $x \in D_\alpha$.

**Teorema 3.** *Jei* $\{1\} \in T$ *ir* $T$ *yra tiršta intervale* $[0,1]$, *tai* $\mathcal{F}_T$ *generuoja erdvės* $D_\alpha$ *Borelio aibių* $\sigma$*-algebrą* $\mathcal{B}_\alpha$.

## Literatūra


[1] Patric Billingsly, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York (1968).

[2] Michael Woodroofe, *On the Weak Convergence of Stochastic Processes without Discontinuities of the Second Kind*, Z. Wahrsch. verw. Geb., **11**, 18–25 (1968).

# Complete metric in the space of discontinuous functions

R. Banys

Complete metrics in the subspaces $D_\alpha$, $\alpha > 0$ of $D[0,1]$ which were introduced in [2] are given. These metrics are equivalent to the metrics $d_\alpha$ defined in [2] and are stronger than the well-known metric $d$ in $D[0,1]$ given in [1].