

Модель динамики реактора, учитывающая влияние запаздывающих нейтронов

Костас БУЧИС, Раса ГРИГОЛЕНЕ, Донатас ШВИТРА (КУ)
e-mail: grigra@takas.lt

Введение

Устойчивость стационарных режимов работы реакторов служит той характеристикой, которая определяет работоспособность реактора и возможность его нормальной эксплуатации [1]. Не случайно этому вопросу уделяется значительное внимание. Ядерные установки являются, вообще говоря, объектами с распределенными параметрами, и достаточно строгие математические модели этих установок выражаются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных или при некоторых дополнительных упрощениях уравнениями с запаздывающим аргументом [2, 3, 4]. Теория устойчивости и бифуркаций автоколебаний в системах с распределенными параметрами и в системах с запаздыванием развита в работах [5, 6, 7].

1. Модель динамики ядерного реактора

Основные понятия в динамике ядерных реакторов, общие для всех реакторов, – это реактивность, время жизни нейтронов и запаздывающие нейтроны. В работе [8] точечную модель ядерного реактора, в которой учтены запаздывающие нейтроны, образует система из двух дифференциальных уравнений с запаздываниями.

$$\dot{N}(t) = r_N \left[1 + a \left(1 - \frac{C(t)}{C_0} \right) - \frac{N(t - h_N)}{N_0} \right] N(t), \quad (1.1)$$

$$\dot{C}(t) = r_C \left[\frac{N(t)}{N_0} - \frac{1}{C_0} \sum_{j=1}^6 a_j C(t - h_j) \right] C(t), \quad (1.2)$$

где r_N – коэффициент линейного роста плотности нейтронов, r_C – коэффициент линейного роста суммарной плотности запаздывающих

нейтронов, a ($-1 < a \leq 0$) – параметр обратной связи, $N(t)$ – полная плотность нейтронов (мощность реактора) в момент времени t , N_0 – ее стационарное значение, $C(t)$ – суммарная плотность запаздывающих нейтронов в момент времени t , C_0 – ее стационарное значение, $h_N > 0$ – запаздывание в передаче возмущений по цепи обратной связи мощность-реактивность, равное средней продолжительности жизни нейтронов в реакторе, $h_j > 0$ – запаздывание, означающее время генерации запаздывающих нейтронов j -ого сорта (отражает период полураспада $T_{1/2}$), $\alpha_j = \frac{\beta_j}{\beta}$ – относительный выход запаздывающих нейтронов j -ого сорта ($\sum_{j=1}^6 \alpha_j = 1$).

В реакторах на тепловых нейтронах $h_N \approx 10^{-3}$ сек, а $h_j \approx 10^{-1} - 10^2$ сек, поэтому положим $h_N = 0$. Таким образом, будем предполагать, что для реакторов на тепловых нейтронах точечной моделью динамики реактора является система дифференциальных уравнений с шестью запаздываниями

$$\dot{N}(t) = r_N \left[1 + a \left(1 - \frac{C(t)}{C_0} \right) - \frac{N(t)}{N_0} \right] N(t), \quad (1.3)$$

$$\dot{C}(t) = r_C \left[\frac{N(t)}{N_0} - \frac{1}{C_0} \sum_{j=1}^6 a_j C(t - h_j) \right] C(t). \quad (1.4)$$

При изучении динамики ядерных реакторов обычно считают, что существует шесть различных групп излучателей запаздывающих нейтронов. Это учтено в модели (1.3)–(1.4). Бесспорно, для поддержания устойчивого режима работы ядерного реактора важнейшими являются механизм отвода тепла и движение топливных стержней или твэлов. Эти вопросы выходят за рамки нашего исследования.

2. Линейный анализ

Система (1.3)–(1.4) имеет следующие состояния равновесия с неотрицательными координатами:

$$N(t) \equiv 0, \quad C(t) \equiv 0, \quad (2.1)$$

$$N(t) \equiv (1 + a)N_0, \quad C(t) \equiv 0, \quad (2.2)$$

$$N(t) \equiv N_0, \quad C(t) \equiv C_0. \quad (2.3)$$

Состояния равновесия (2.1), (2.2) при рассматриваемых значениях параметров всегда неустойчивы. Исследуем устойчивость внутреннего состояния равновесия (2.3). Из системы (1.3)–(1.4) после замены переменных

$$N(t) = N_0 [1 + x(t)], \quad C(t) = C_0 [1 + y(t)] \quad (2.4)$$

получим систему уравнений

$$\dot{x}(t) = -r_N [1 + x(t)] [x(t) + ay(t)], \quad (2.5)$$

$$\dot{y}(t) = r_C [1 + y(t)] \left[x(t) - \sum_{j=1}^6 \alpha_j y(t - h_j) \right]. \quad (2.6)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$(\lambda + r_N) \left[\lambda + r_C \sum_{j=1}^6 \alpha_j \exp(-\lambda h_j) \right] + ar_N r_C = 0 \quad (2.7)$$

линейной части системы (2.5)–(2.6).

Методом D -разбиений [9] рассмотрим расположение корней уравнения (2.7) на плоскости параметров r_C и a . Уравнение (2.7) имеет нулевой корень $\lambda = 0$ при $r_C = 0$ и $a = -1$. Эти прямые являются одними из кривых, образующих D -разбиение плоскости $r_C a$. Пусть теперь уравнение (2.7) имеет чисто мнимый корень. Подставляя в него $\lambda = i\sigma$, отделяя действительную и мнимую части, получим уравнения остальных кривых D -разбиения в параметрической форме

$$r_C = \frac{r_N \sigma}{r_N \sum_{j=1}^6 \alpha_j \sin \sigma h_j - \sigma \sum_{j=1}^6 \alpha_j \cos \sigma h_j}, \quad (2.8)$$

$$a = \frac{\sigma^2}{r_N r_C} - \frac{\sigma}{r_N} \sum_{j=1}^6 \alpha_j \sin \sigma h_j - \sum_{j=1}^6 \alpha_j \cos \sigma h_j. \quad (2.9)$$

При $\sigma \rightarrow 0$ из (2.8)–(2.9) определяем так называемую точку возврата (r_C^*, a^*) , координаты которой

$$r_C^* = \frac{r_N}{r_N \sum_{j=1}^6 \alpha_j h_j - 1}, \quad a^* = -1. \quad (2.10)$$

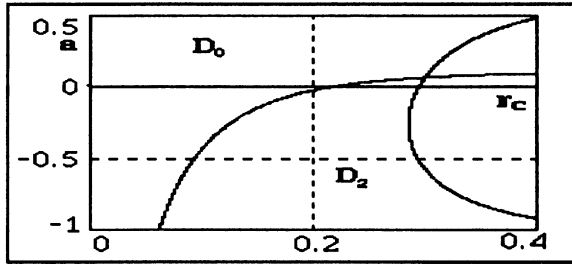
Рассмотрим случай конкретного реактора.

Для построения кривых D -разбиения нам необходимо выбрать значение параметра r_N , т.е., определить линейную скорость роста мощности реактора. Будем следовать следующей методике [7].

Пусть $[t_0, t_0 + \Delta t]$ – такой промежуток времени, что на нем $N(t)$ и $C(t)$ малы. Тогда из (1.3) следует, что

$$\dot{N}(t) \approx r_N(1 + a)N(t). \quad (2.11)$$

Если выберем $(t_0, t_0 + \Delta t)$ в начальной фазе работы реактора, то, очевидно и $a = 0$. Тогда, например, для реактора TRIGA [10] из (2.11) получаем, что $r_N \approx 4$ (сек)⁻¹. D -разбиение плоскости $r_C a$ в этом случае

Рис. 1. D -разбиение.

при значениях параметров α_j и h_j по данным запаздывающих нейтронов для реактора TRIGA [10] изображено на рис. 1.

Лемма 1. Область D_0 является областью асимптотической устойчивости состояния равновесия (2.3) системы дифференциальных уравнений (1.3)–(1.4).

Доказательство. Покажем, что в области D_0 все корни уравнения (2.7) удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Действительно, пусть $a = 0$. Тогда задача сводится к изучению корней квазиполинома

$$P(\lambda, r_C) = \lambda + r_C \sum_{j=1}^6 \alpha_j \exp(-\lambda h_j). \quad (2.12)$$

Эта задача решена в [7, 8], откуда следует, что для (2.12) при $0 < r_C < r_C^0$ всегда $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Здесь

$$r_C^0 = \frac{\sigma_0}{\sum_{j=1}^6 \alpha_j \sin \sigma_0 h_j}, \quad (2.13)$$

где σ_0 – единственный корень уравнения

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_j \cos \sigma h_j = 0, \quad (2.14)$$

принадлежащий интервалу $(0, \frac{\pi}{2h_1})$.

Интервал $(0, r_C^0)$ принадлежит области D_0 , поэтому и во всей области D_0 выполняется неравенство $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. При переходе из области D_0 через границу области устойчивости в область D_2 у характеристического уравнения (2.7) появляется одна пара комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью, а у остальных корней $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Доказательство легко следует из приведенного D -разбиения и из [7, 9].

3. Нелинейный анализ

Пусть $a = 0$. Тогда $N(t) \rightarrow N_0$ при $t \rightarrow \infty$ и система (1.3)–(1.4) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\dot{C}(t) = r_C \left[1 - \frac{1}{C_0} \sum_{j=1}^6 \alpha_j C(t - h_j) \right] C(t). \quad (3.1)$$

В [7] показано, что при $r_C > r_C^0$ у (3.1) появляется устойчивое периодическое решение, которое можно построить при помощи асимптотических формул. Методика построения периодического решения системы (1.3)–(1.4) также следует из [7], причем используется теория бифуркаций.

Систему нелинейных уравнений (1.3)–(1.4) опишем моделью, которая создана при помощи пакета моделирования MODEL MAKER [11].

Введя значения параметров α_j и запаздываний h_j по данным запаздывающих нейтронов для реактора TRIGA [10], считая $-1 < a < 0$, N_0 и C_0 постоянными, а изменяя значения коэффициентов r_N и r_C , анализируем решения системы (1.3)–(1.4).

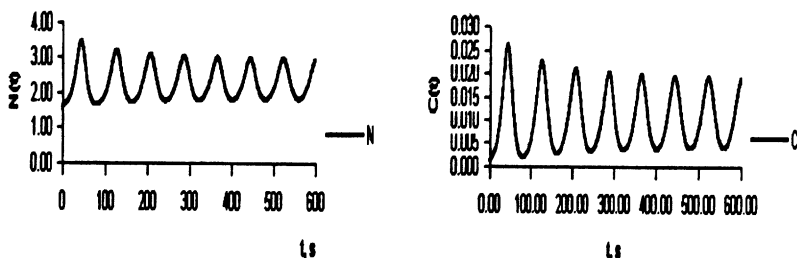


Рис. 2–3. Устойчивое периодическое решение системы (1.3)–(1.4) при $a = -0,5$, $N_0 = 2,5$, $C_0 = 0,015$, $r_N = 1800$, $r_C = 0,2$.

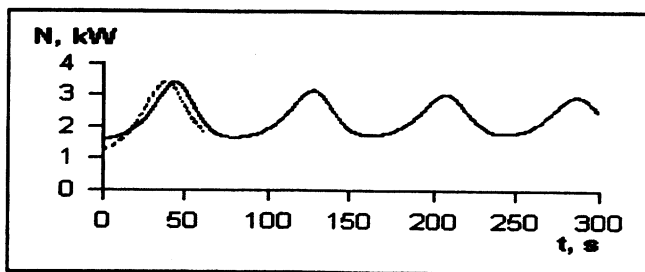


Рис. 4. Расчетная кривая (сплошная) при $r_C = 0,2$, $a = -0,5$. Экспериментальная кривая (точечная).

На рис. 4 расчетная кривая $N(t)$ по модели (1.3)–(1.4) реактора TRIGA сравнена с экспериментальной кривой [10].

4. Выводы

Получена точечная модель динамики реактора, состоящая из системы двух дифференциальных уравнений с запаздываниями. Методом D -разбиения найдены область асимптотической устойчивости D_0 и область D_2 , где появляется устойчивое периодическое решение. Численный эксперимент подтверждает правильность теоретических результатов. Результаты, полученные численным экспериментом, хорошо совпадают с экспериментальными данными ядерного реактора TRIGA.

Литература

- [1] Ф.М. Митенков, Актуальные задачи динамики энергетических реакторов, Вопросы атомной науки и техники, *Физика и техника ядерных реакторов*, 6(19), 3–5 (1981).
- [2] В.Д. Горяченко, С.Л. Золотарев, В.А. Колчин, *Исследование динамики ядерных реакторов качественными методами*, Москва, Энергоатомиздат (1988).
- [3] Д. Швитра, К. Бучис, Роль запаздывания в динамике ядерных реакторов, *Литовский физический журнал*, 39(6), 451–455 (1999).
- [4] H.J. Jacobowitz, A.Z. Akcasu, L.M. Sholtkin, Stability consideration with convection time delays, *Trans. Amer. Nucl. Soc.*, 9(1), 272–273 (1966).
- [5] Ю.С. Колесов, В.С. Колесов, И.И. Федик, *Автоколебания в системах с распределенными параметрами*, Киев, Наукова думка (1979).
- [6] Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра, *Автоколебания в системах с запаздыванием*, Вильнюс, Мокслас (1979).
- [7] Д.И. Швитра, *Динамика физиологических систем*, Вильнюс, Мокслас (1989).
- [8] K. Bučys, D. Švitra, Reaktorius dinamikos modelio analizė, *LMD mokslo darbai*, 3, 336–341 (1999).
- [9] Ю.И. Неймарк, *Динамические системы и управляемые процессы*, Москва, Наука (1978).
- [10] Ф. Адлер, К. Хорник, А. Бексгер, Полуаналитические методы исследования переходных процессов в реакторе, *Кинетика и регулирование ядерных реакторов*, Москва, Атомиздат, 3–17 (1967).
- [11] *Model Maker 3, User's Guide*, Cherwell Scientific Publishing Limited.

Reaktorius dinamikos modelis, atsižvelgiantis į vėluojančių neutronų įtaką

K. Bučys, R. Grigolienė, D. Švitra

Remiantis netiesiniais reaktorių dinamikos modeliais, įskaitant vėluojančių neutronų poveikį, išnagrinėtas branduolinių reaktorių stabilumo uždavinys. Atlikta reaktorius dinamikos taškinių modelio, susidedančio iš dviejų netiesinių diferencialinių lygčių su vėlavimu, tiesinė analizė. D -suskaidymo metodu rastos reaktorius TRIGA asimptotinio stabilumo sritis ir sritis, kurioje atsiranda stabilus periodinis sprendinys. Atliktas skaitinis eksperimentas. Reaktorius TRIGA modelio stabilus periodinio sprendinio kreivė palyginta su eksperimentine kreive.