Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 485–490

Konvergavimo greičio įverčio radimo procedūra

Robertas VILKAS, Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: vilkas@migla.ktu.lt

1. Įvadas

Pateiksime vieną konvergavimo greičio įverčio radimo procedūrą. Kartais intuityviai būna aiški konvergavimo greičio eilė, bet sunkoka būna tai įrodyti. Pasirodo, kad jei ieškotume iš karto optimalaus konvergavimo greičio įverčio, tai nesunku būtų patikrinti ar parinktasis įvertis yra tikrai optimalus. Tai pirma.

Pradžioje apibrėžiame aprėžtos funkcijos tolygųjį optimalų įvertį, kai funkcija artėja prie nulio vienam funkcijos argumentui artėjant į begalybę. Vėliau apibrėžiamas ir netolygusis optimalus įvertis. Jis gaunamas skleidžiant funkciją eilute, tam tikra prasme bendresne nei Lorano eilutė. Tai antra.

Ieškant įverčio tenka skaičiuoti konstantas. 4 skyriuje yra pateiktas praktinis konstantų skaičiavimo algoritmas, pritaikytas kompiuteriams. Tai būtų trečias momentas.

Aptartą procedūrą pritaikėme stochastinių ekstremumų asimptotinėje analizėje.

2. Optimalaus funkcijos įverčio apibrėžimas

Tarkime, kad $U_n \subseteq \mathbb{R}$, $A = \{(x,n): x \in U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $U = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. Sakykime, kad funkcija $f(x,n)$ yra apibrėžta aibėje A ir tenkina sąlygą

$$\lim_{n\to+\infty} f(x,n) = 0, \tag{1}$$

o funkcija $g(n)$ yra apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje ir tenkina dvi sąlygas:

$$\begin{aligned} &1)\quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 < g(n) < +\infty;\\ &2)\quad \lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Ieškome tolygaus funkcijos $f(x,n)$ įverčio, t.y. $\forall (x,n) \in A$

$$\frac{a}{g(n)} \leqslant f(x,n) \leqslant \frac{b}{g(n)}. \tag{3}$$

Įvertis (3) bus tuo geresnis, kuo funkcija $g(n)$ greičiau artės į begalybę, kai $n \to +\infty$. Geriausią tokį įvertį (tikslumu iki daugiklio, kuris artėja į baigtinę nenulinę konstantą, kai $n \to +\infty$) vadinsime *optimaliu*. Žemiau pateikiame ekvivalentų (tai galima įrodyti) apibrėžimą, kuriame optimalumas suprantamas taip pat konvergavimo eilės prasme.

1 apibrėžimas. *Sakykime, kad funkcija $f(x,n)$ aibėje A yra aprėžta ir tenkina* (1) *sąlygą, o funkcija $g(n)$ tenkina* (2) *sąlygas. Funkcijos $f(x,n)$ tolygųjį įvertį* (3) *vadinsime optimaliu, jei egzistuoja riba*

$$\lim_{n\to+\infty} g(n)f(x,n) = L(x), \tag{4}$$

čia funkcija $L(x)$ yra tokia, kad:

1) $\exists x_0 \in U$: $L(x_0) \neq 0$, *t.y. funkcija $L(x)$ nėra tapati nuliui,*

2) $\exists c$ *tokia, kad* $\forall x \in U$: $|L(x)| < c$, *t.y. funkcija $L(x)$ yra aprėžta aibėje U.*

Pagal šį apibrėžimą egzistuoja be galo daug optimalių įverčių. Tačiau kokie gali būti visi kiti įverčiai, jei vieną žinome? Į šį klausimą atsako tokia lema.

1 lema. *Tarkime, kad funkcijos $g(n)$ ir $h(n)$ tenkina* (2) *sąlygas ir funkcija $g(n)$ atitinka optimalų funkcijos $f(x,n)$ įvertį* (3). *Tada būtina ir pakankama sąlyga, kad funkcija $h(n)$ taip pat atitiktų optimalų funkcijos $f(x,n)$ įvertį* (3), *yra ši:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c, \quad c < +\infty, \quad c \neq 0. \tag{*}$$

Įrodymas. 1) *Pakankamumas.* Turime, kad funkcijai $h(n)$ teisinga (*). Įrodysime, kad tuomet jai galios ir (4). Sąlyga (*) reiškia, kad funkcijos $g(n)$ ir $c\cdot h(n)$ yra ekvivalenčios, kai $n \to +\infty$. Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{n\to+\infty} h(n)f(x,n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{c} f(x,n) = \frac{1}{c}L(x) = L_1(x).$$

Funkcija $g(n)$ atitinka optimalų įvertį. Todėl funkcija $L(x)$ nėra tapati nuliui ir yra aprėžta. Kadangi $c \neq 0$ ir $c < +\infty$, tai funkcija $L_1(x)$ taip pat nebus tapati nuliui ir bus aprėžta, t.y. funkcija $h(n)$ taip pat atitiks optimalų funkcijos $f(x,n)$ įvertį.

2) *Būtinumas.* Turime, kad funkcijos $g(n)$ ir $h(n)$ tenkina (2) sąlygas ir atitinka optimalų funkcijos $f(x,n)$ įvertį (3), t.y. tenkina (4). Įrodysime, kad tuomet galios ir sąlyga (*). Įrodysime prieštaros būdu. T.y. tarkime, kad

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c, \quad c = +\infty \quad \text{arba} \quad c = 0.$$

Pažymėkime $v(n) = \frac{g(n)}{h(n)}$. Tuomet $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)\cdot v(n)} = 1$. Kadangi $g(n)$ atitinka optimalų įvertį, tai $h(n)\cdot v(n)$ taip pat atitiks optimalų įvertį (tai išplaukia iš pakankamumo, kurį jau įrodėme). Skaičiuojame ribą

$$\lim_{n\to+\infty} h(n)v(n)f(x,n) = \lim_{n\to+\infty} h(n)f(x,n) \cdot \lim_{n\to+\infty} v(n) = L_1(x)\cdot c = L_2(x).$$

Kadangi funkcija $L_1(x)$ nėra tapati nuliui ir yra aprėžta (nes $h(n)$ atitinka optimalų įvertį), tai $\exists x_0 \in U\colon |L_2(x_0)| = +\infty$ (jei $c = +\infty$) arba $L_2(x) \equiv 0$ (jei $c = 0$), kas prieštarauja tam, kad $h(n) \cdot v(n)$ atitinka optimalų įvertį.

Pasirodo, kad gali ir neegzistuoti optimalus funkcijos $f(x,n)$ įvertis.

2 lema. *Sakykime, kad funkcija $f(x,n)$ aibėje A yra aprėžta ir tenkina* (1) *sąlygą, o funkcija $g(n)$ tenkina* (2) *sąlygas. Pažymėkime $L(x) = \lim_{n\to+\infty} g(n)f(x,n)$. Jei pavyko rasti tokią funkciją $g(n)$, kad funkcija $L(x)$ tenkina sąlygas:*

1) $\exists x_0 \in U\colon L(x_0) \neq 0$,

2) $\forall x \in U\colon |L(x)| \neq +\infty$,

4) *funkcija $L(x)$ nėra aprėžta aibėje U,*

tai neegzistuoja funkcija $h(n)$ (tenkinanti (2) *sąlygas) tokia, kad $\forall (x,n) \in A\colon \frac{a}{h(n)} \leqslant f(x,n) \leqslant \frac{b}{h(n)}$ ir šis įvertis būtų optimalus.*

Įrodymas. Įrodysime prieštaros metodu, t.y. tarkime, kad tokia funkcija $h(n)$ egzistuoja. Remiantis optimalaus įverčio apibrėžimu funkcija $L_1(x) = \lim_{n\to+\infty} h(n)f(x,n)$ turi būti aprėžta aibėje U ir neturi būti tapati nuliui. Pažymėkime ribą $c = \lim_{n\to+\infty} \frac{h(n)}{g(n)}$. Išskirkime tris atvejus: 1) $c = 0$; 2) $c = +\infty$; 3) $c \neq 0, c \neq +\infty$.

Atvejis, kai $c = 0$. Kadangi $\forall x \in U\colon |L(x)| \neq +\infty$, tai $\forall x \in U\colon L_1(x) = \lim_{n\to+\infty} h(n)f(x,n) = \lim_{n\to+\infty} g(n)f(x,n) \lim_{n\to+\infty} \frac{h(n)}{g(n)} = L(x) \cdot c = 0$, kas prieštarauja tam, kad funkcija $L_1(x)$ nėra tapati nuliui.

Atvejis, kai $c = +\infty$. Kadangi $\exists x_0 \in U\colon L(x_0) \neq 0$, tai $|L_1(x_0)| = |L(x_0) \cdot c| = +\infty$, kas prieštarauja funkcijos $L_1(x)$ aprėžtumui.

Jei $c \neq 0$ ir $c \neq +\infty$, tai remiantis 1 lema gautume, jog iš to, kad funkcija $h(n)$ atitinka optimalų įvertį išplaukia tai, kad tuomet ir funkcija $g(n)$ turi atitikti optimalų įvertį. Gautoji prieštara užbaigia lemos įrodymą.

3. Netolygusis įvertis

Tegu funkcija $\Delta(x,n)$ yra aprėžta aibėje A ir $\lim_{n\to+\infty} \Delta(x,n) = 0$. Pažymėkime

$$f_1(x,n) = \Delta(x,n), \quad f_{k+1}(x,n) = f_k(x,n) - \frac{L_k(x)}{g_k(n)},$$
$$L_k(x) = \lim_{n\to+\infty} g_k(n) \cdot f_k(x,n).$$

3 lema. *Tarkime, kad pavyko rasti teigiamas ir baigtiniams n aprėžtas funkcijas $g_k(n)$ tokias, kad $\forall k (1 \leqslant k \leqslant m)$ funkcijos $L_k(x)$ tenkina dvi sąlygas:*

1) *aibėje U aprėžtos,*

2) *nėra tapačios nuliui.*

Tada:

1) $\exists$ *tokios baigtinės konstantos* a_m *ir* b_m, *kad* $\forall (x,n) \in A$:

$$\frac{a_m}{g_m(n)} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{L_j(x)}{g_j(n)} \leqslant \Delta(x,n) \leqslant \sum_{j=1}^{m-1} \frac{L_j(x)}{g_j(n)} + \frac{b_m}{g_m(n)}, \tag{5}$$

2) *funkcijų* $f_k(x,n)$ *įverčiai* $\frac{a_k}{g_k(n)} \leqslant f_k(x,n) \leqslant \frac{b_k}{g_k(n)}$ *yra optimalūs* ($1 \leqslant k \leqslant m$).

Įrodymas. Lema įrodoma matematinės indukcijos metodu. Kadangi straipsnio apimtis ribota, tai įrodymo nepateiksime.

Tarkime, kad skirstinių seka $\{F_n(x),\ n \geqslant 1\}$ silpnai konverguoja į skirstinį $F(x)$: $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to +\infty$. Konvergavimo greitis apibrėžiamas sąryšiu: $\Delta(x,n) = F_n(x) - F(x)$.

Kadangi konvergavimo greitis yra skirstinių skirtumas, tai $\Delta(x,n)$ yra aprėžta aibėje A funkcija (netgi $-1 \leqslant \Delta(x,n) \leqslant 1$). Taigi, konvergavimo greičiui galime taikyti 3 lemą ir gauti (5) įvertį.

Konstantas galima būtų skaičiuoti tokiu būdu:

$$a_m = \inf_{(x,n)\in A} g_m(n) f_m(x,n), \quad b_m = \sup_{(x,n)\in A} g_m(n) f_m(x,n). \tag{6}$$

4. Konstantų skaičiavimas

Skaičiuoti konstantas a_m ir b_m remiantis (6) formule bendru atveju yra sudėtingas uždavinys. Bet tam tikslui galime panaudoti kompiuterį. Pažymėkime

$$L(x,n) = g(n) f(x,n), \quad L(x) = \lim_{n\to+\infty} L(x,n),$$
$$a = \inf_{(x,n)\in A} L(x,n), \quad b = \sup_{(x,n)\in A} L(x,n).$$

Kadangi n yra natūralusis skaičius, tai kompiuterio pagalba galime ieškoti funkcijos $L(x,n)$ infinumo ir suprenumo prie kiekvienos fiksuotos n reikšmės pradedant nuo $n = 1$ ir t.t. Kai n pakankamai didelis, tai funkcijos $L(x,n)$ didžiausioji (mažiausioji) reikšmė beveik sutaps su funkcijos $L(x)$ didžiausiąja (mažiausiąja) reikšme. [2] straipsnyje pateiktiems atvejams ieškant konvergavimo greičio įverčių, kompiuteris (naudojant paketą Maple) sprendė vieno kintamojo funkcijos maksimizavimo (ar minimizavimo) uždavinį net iki $n = 10^5$, t.y. šimtą tūkstančių kartų. Tai užtruko neilgiau kaip 20 min. Pažymėkime

$$\hat{a} = \inf_{x\in U} L(x), \quad \hat{b} = \sup_{x\in U} L(x),$$
$$a(n) = \min_{s=1,2,\dots,n} \Bigl(\inf_{x\in U_s} L(x,s)\Bigr), \quad b(n) = \max_{s=1,2,\dots,n} \Bigl(\sup_{x\in U_s} L(x,s)\Bigr).$$

Galima būtų imti:

$$a = \min\{a(10^5), \hat{a}\}, \quad b = \max\{b(10^5), \hat{b}\}. \tag{7}$$

5. Pavyzdžiai

Tarkime, kad $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ ir $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ yra dvi paprastosios atsitiktinės imtys ir tolygiosios intervale (0,1) generalinės aibės. Atsitiktiniai dydžiai X_j, Y_j, $(i, j \geqslant 1)$ nepriklausomi ir nepriklauso nuo atsitiktinio imties tūrio N. Apibrėžę atsitiktinius maksimumus $Z_{1,N} = \max(X_1, \dots, X_N)$, $Z_{2,N} = \max(Y_1, \dots, Y_N)$ sudarome netiesinę struktūrą $U_N = Z_{1,N} \cdot Z_{2,N}$.

Darbe [2] buvo gautos šios struktūros ribinės teoremos, kai $MN = n \to +\infty$. Buvo tiriami atvejai, kai imties tūris N yra determinuotas (šiuo atveju vietoj N rašysime n) ir atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį.

Tačiau nebuvo gauti konvergavimo greičių įverčiai. Pačių ribinių teoremų čia nepateiksime. Rasime konvergavimo greičio tolygųjį (3) ir netolygųjį (5) (apsiribosime trečiąja eile, t.y. $m = 3$) optimalius įverčius.

Determinuotu atveju statistikos U_n konvergavimo greitis:

$$\Delta(x, n) = \begin{cases} -(1-x)e^x & x \leqslant -n; \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) - (1-x)e^x, & -n < x \leqslant 0; \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Taigi, įdomus yra tik atvejis, kai $-n < x \leqslant 0$, t.y. $U_n = \{x : -n < x \leqslant 0\}$, $U = \{x : x \leqslant 0\}$, $A = \{(x, n) : x \in U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1 teorema. *$\exists$ baigtinės konstantos a_1, b_1, a_3, b_3 tokios, kad $\forall (x, n) \in A$ teisingos nelygybės:*

$$\frac{a_1}{n} \leqslant \Delta(x, n) \leqslant \frac{b_1}{n},$$
$$\frac{a_3}{n^3} + \frac{L_2(x)}{n^2} + \frac{L_1(x)}{n} \leqslant \Delta(x, n) \leqslant \frac{L_1(x)}{n} + \frac{L_2(x)}{n^2} + \frac{b_3}{n^3};$$

čia

$$L_1(x) = \lim_{n \to +\infty} \Delta(x, n) \cdot n = \frac{x^3}{2} e^x,$$
$$L_2(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\Delta(x, n) - \frac{L_1(x)}{n}\right) \cdot n^2 = -\frac{(11 + 3x)x^4}{24} e^x,$$
$$L_3(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\Delta(x, n) - \frac{L_1(x)}{n} - \frac{L_2(x)}{n^2}\right) \cdot n^3 = \frac{(20 + 10x + x^2)x^5}{48} e^x.$$

Be to, šie įverčiai yra optimalūs.

Įrodymas. Funkcijos $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ nėra tapačios nuliui ir yra aprėžtos aibėje U. Toliau, pakanka remtis 3 lema. Teorema įrodyta.

Remiantis (7) kompiuteriu paskaičiuotos konstantos:

$$a_1 = -0,833, \quad b_1 = 0, \quad a_3 = -2,142, \quad b_3 = 2,736.$$

Įdomų atvejį gauname, kai N skirstinys yra geometrinis (žr. 2 teoremą).

2 teorema. $\exists$ *baigtinės konstantos* a_1, b_1 *tokios, kad* $\forall(x,n) \in A$ *teisinga nelygybė:*

$$\frac{a_1}{n} \leqslant \Delta(x,n) \leqslant \frac{b_1}{n}.$$

Ir šis įvertis yra optimalus. Tačiau neegzistuoja optimalus netolygusis įvertis.

Ši teorema įrodoma remiantis 2 lema. Dėl straipsnio apimties ribotumo nepateikiame nei $\Delta(x,n)$ išraiškos šiam atvejui, nei šios teoremos įrodymo. Remiantis (7) kompiuteriu paskaičiuota, kad $a_1 = -2$, $b_1 = 0$.

Literatūra

[1] R. Vilkas, Atsitiktinių maksimumų sandaugos konvergavimo greičio įvertis, *Matematika ir matematinis modeliavimas-2001: konferencijos pranešimų medžiaga*, Kaunas, 31–33 (2001).

[2] A. Aksomaitis, R. Vilkas, Netiesinės stochastinių maksimumų struktūros, *LMD mokslo darbai*, Vilnius, 345–348 (1998).

Procedure for finding estimate of convergence rate

R. Vilkas, A. Aksomaitis

Here is presented one method for finding convergence rate estimate of probability function.