Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 113–118
© 2001 Matematikos ir informatikos institutas

Ribinė didžiųjų nuokrypių lokalioji teorema multiplikatyviosioms funkcijoms

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: algebra@vpu.lt

Tęsdami savo atsakymus į J. Knopfmacherio monografijoje [1] iškeltus klausimus (*Open Questions*), šiame straipsnyje įrodysime didžiųjų nuokrypių lokaliąją ribinę teoremą multiplikatyviosioms funkcijoms, apibrėžtoms kitokioje nei natūraliųjų skaičių, „aritmetinėje" pusgrupėje G. Šia tematika autorius jau yra paskelbęs keletą straipsnių (žr. pvz., [4], [5], [6]), parodžiusių, kad klasikinės tikimybinės skaičių teorijos faktai turi savo analogus pusgrupėje G, tačiau atsiranda ir specifinių, natūraliųjų skaičių pusgrupei nebūdingų momentų.

Tiriamosios aritmetinių *multiplikatyviųjų* funkcijų klasės $M(G)$ apibrėžimas ir svarbiausieji žymenys išlieka tie patys, kaip ir straipsnyje [6]. Priminsime, kad, pagal apibrėžimą, *adicinė aritmetinė pusgrupė* G yra laisvoji komutatyvi pusgrupė (su vienetiniu elementu 1), kurią generuoja skaiti pirminių elementų p aibė P. Aibėje G yra apibrėžta visiškai adityvioji *laipsnio funkcija* $\delta\colon G \to N \cup \{0\}$ tokia, kad, su kiekvienu $p \in P$, $\delta(p) \geqslant 1$ ir, be to, galioja speciali aksioma (žr. [1,2]).

Aksioma. *Egzistuoja tokios konstantos* $A > 0$, $q > 1$ *ir* $0 \leqslant \nu < 1$, *kad*

$$G(n) := \operatorname{Card}\{a \in G;\ \delta(a) = n\} = Aq^n + O(q^{\nu n}).$$

Dar priminsime pagrindinę, multiplikatyviųjų funkcijų $g(m)$ klasę $M(G)$ aprašančią sąlygą ir svarbiausius straipsnių [5,6] žymenis.

Apibrėžimas. *Sakysime, kad multiplikatyvioji funkcija* $g\colon G \to R$ *priklauso klasei* $M(G)$, *jei su visais galimais* $\nu \in R$ *yra tenkinamos sąlygos*

$$\sum_{\substack{p\in P,\ \delta(p)=l\\ g(p)=\nu}} 1 = \pi(l)\big(\lambda_\nu + \rho_\nu(l)\big), \quad \nu \in R,\ l \geqslant 1,$$

čia $\lambda_\nu \in [0,1]$ – *konstantos, o* $\rho_\nu(l)$ – *liekamieji nariai. Be to,* $\rho_\nu(l) =: C_\nu(l)l^{-a}$ *su konstanta* $a > 0$ *ir (tolygiai su visais* $l \geqslant 1$*) konverguojančia eilute* $\sum_\nu |C_\nu(l)|$.

Toliau visur: $k = 0, 1$; $\lambda := \sqrt{\log n}$;

$$\chi_k := \chi_k(t) = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu |\nu|^{it} \operatorname{sgn}^k \nu; \quad E_{kj} := \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \operatorname{sgn}^k \nu \log^j |\nu|;$$

$$\gamma_k = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \operatorname{sgn}^k \nu; \quad \sigma_k^2 = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \operatorname{sgn}^k \nu \log^2 |\nu|; \quad y_k = \frac{\log|m| - E_{k1}\lambda^2}{\lambda};$$
$$\eta_k(t) = \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu \operatorname{sgn}^k \nu \cos\big(t \log|\nu|\big);$$
$$A_1 := \frac{1}{A} \prod_{p\in P} \Big(1 - \frac{1}{\|p\|}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\Big)^{-1}.$$

Skaičiai t_0 ir τ_0 yra lygčių $\eta_0(t) = \gamma_0$ ir $\eta_1(t) = -\gamma_1$ sprendiniai iš intervalo $(-\pi, \pi]$.

Darbe [5] yra įrodyta lokalioji ribinė teorema klasės $M(G)$ multiplikatyviosioms funkcijoms. Siekiant praplėsti lokaliosios teoremos galiojimo zoną, straipsnyje [6] gautas pagrindinio nario asimptotinis skleidinys λ^{-1} laipsniais. Visgi ir šiuo atveju į skleidinio koeficientus įeinanti standartinio normaliojo skirstinio tankio funkcija φ tą zoną riboja. Kaip matysime, įmanoma gauti ir dar platesnėje zonoje galiojančią, t.y. *didžiųjų nuokrypių teoremą*, kuri yra autoriaus darbe [3] gauto rezultato analogas.

Teorema. *Tarkime $g \in M(G)$, $\sigma_0^2 > 0$ ir $\log|g(a)|$ su visais $a \in G$ tokiais, kad $g(a) \neq 0$, įgija tik sveikąsias reikšmes. Tarkime, be to, kad egzistuoja konstanta $c > 0$, su kuria eilutės*

$$\sum_{\nu,\nu\neq 0} \mathrm{e}^{c|\log|\nu||} \lambda_\nu; \qquad \sum_{p,j\geqslant 2, g(p^j)\neq 0} \mathrm{e}^{c|\log|g(p^j)||} q^{-j\delta(p)}; \qquad \sum_{\nu,\nu\neq 0} \mathrm{e}^{c|\log|\nu||} |C_\nu(l)|$$

konverguoja (pastaroji tolygiai su visais $l \geqslant 1$). Tada, jeigu $|m| = n^{E_{01}+o(1)}$, tai, kai $n \to \infty$, yra teisinga asimptotinė formulė

$$\nu_n(m) := \frac{1}{Aq^n} \operatorname{Card}\{a \in G;\ \delta(a) = n,\ g(a) = m\}$$
$$= \sum_{k=0}^{1} \frac{\operatorname{sgn}^k m}{2n^{1-\gamma_0}} H_k(g, G) \exp\{\lambda^2 A(\xi_0)\} \Big(1 + O\Big(|\xi_0| + \frac{\log^2 \lambda}{\lambda^2}\Big)\Big) + O(n^{-\beta}).$$

Čia $\beta = \beta(\alpha) > 0$ yra konstanta, $\xi := \frac{\log|m|}{\lambda^2} - E_{01}$,

$$A(\xi_0) := \gamma(\xi_0) - \gamma_0 - (E_{01} + \xi)\ln(1 + \xi_0),$$
$$\gamma(\xi_0) := \sum_{v,v\neq 0} (1 + \xi_0)^{\log|\nu|} \lambda_v,$$

o ξ_0 yra vienintelis lygties

$$\sum_{\nu,\nu\neq 0} \big((1 + x)^{\log|\nu|} - 1\big) \log|\nu| \lambda_\nu = \xi$$

sprendinys intervale $\left(0, \frac{2\xi}{\sigma_0^2}\right)$. *Kai*

$$f_k(a,t,u) := \left|g(a)\right|^{\log(1+u)+it} \operatorname{sgn}^k g(a),$$

tai pagrindinį narį aprašąs „papildomas daugiklis“ $H_k(g,G)$ *atrodo taip:*

$$H_k(g,G) = A^{\gamma(\xi_0)-1} H_1^*(f_k,\xi_0) + (-1)^n \frac{I(G)}{A} A_1^{-\gamma(\xi_0)} H_2^*(f_k,\xi_0),$$

$$H_1^*(f_k,\xi_0) = \frac{1}{\Gamma(\gamma(\xi_0))} \sum_{t_0} \mathrm{e}^{-it_0 \ln|m|} \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{\|p\|}\right)^{\gamma(\xi_0)} \sum_{\substack{j\geqslant 0,\\ g(p^j)\neq 0}} \frac{f_k(p^j, t_0, \xi_0)}{\|p\|^j},$$

$$H_2^*(f_k,\xi_0)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma(\xi_0))} \sum_{\tau_0} \mathrm{e}^{-i\tau_0 \ln|m|} \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\right)^{-\gamma(\xi_0)} \sum_{\substack{j\geqslant 0,\\ g(p^j)\neq 0}} \frac{(-1)^{j\delta(p)} f_k(p^j, \tau_0, \xi_0)}{\|p\|^j}.$$

Įrodymas. Pirmiausia, pasinaudojame straipsnyje [2] įrodyta teorema apie multiplikatyviųjų funkcijų, apibrėžtų pusgrupėje G, reikšmių sumavimą ir gauname:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Aq^n} \sum_{\delta(a)=n} f_k(a,t,0) &= \frac{(An)^{\chi_k-1}}{\Gamma(\chi_k)} \prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{\|p\|}\right)^{\chi_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_k(p^j,t,0)}{\|p\|^j} \\
&+ I(G) \frac{(-1)^n A_1^{\chi_k} n^{-\chi_k-1}}{A\Gamma(-\chi_k)} \prod_{p\in P}\left(1-\frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\right)^{\chi_k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j\delta(p)} f_k(p^j,t,0)}{\|p\|^j} \\
&+ O(n^{-\alpha}\log n) \\
&=: \frac{(An)^{\chi_k}}{\Gamma(\chi_k)} h_{k1}(t) + I(G)\frac{(-1)^n A_1^{\chi_k} n^{-\chi_k-1}}{A\Gamma(-\chi_k)} h_{k2}(t) + O(n^{-\alpha}\log n),
\end{aligned}$$

nes funkcijos $f_k(a,t,u)$ irgi yra multiplikatyvios ir tenkina minėtos straipsnio [2] teoremos sąlygas. Kaip ir darbuose [2–6], simbolis $I(G)$ žymi funkcijos

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n) y^n$$

išskirtinio nulio $y = -q^{-1}$ indikatorių.

Toliau, analogiškai, kaip tai buvo daroma darbuose [5, 6], formulėje

$$\nu_n(t) = \frac{1}{4\pi A q^n} \sum_k \operatorname{sgn}^k m \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-it\log|m|} \sum_{\delta(a)=n} f_k(a,t,0)\,\mathrm{d}t$$

suskaidome integravimo intervalą $(\pi, -\pi]$ į baigtinį skaičių dalinių intervalų pagal lygčių $\eta_0(t) = \gamma_0$ ir $\eta_1(t) = -\gamma_1$ sprendinius t_0 ir τ_0. Atlikę pakeitimus $t \to t+t_0$, $t \to \tau+\tau_0$, gauname standartinę formulę:

$$\nu_n(m) = \sum_k \operatorname{sgn}^k m \cdot J_{kj} + O(n^{-\alpha}\log n), \quad j = 1,2.$$

Čia

$$J_{k1} := \sum_{t_0} J_{k1}(t_0),$$
$$J_{k1}(t_0) := \frac{e^{-it_0 \log|m|}}{4\pi n^{\lambda_0}} \int_{D_1(0)} L_{k1}(t+t_0)\exp\left\{\lambda^2\mu_{k1}(t) - ity_k\lambda\right\} dt,$$

ir

$$J_{k2} := \sum_{\tau_0} J_{k2}(\tau_0),$$
$$J_{k2}(\tau_0) := I(G)\frac{(-1)^n e^{-i\tau_0 \log|m|}}{4\pi A n^{\lambda_0}} \int_{D_2(0)} L_{k2}(\tau+\tau_0)\exp\left\{\lambda^2\mu_{k1}(\tau) - i\tau y_k\lambda\right\} d\tau,$$

o $D_k(0)$, $k = 0,1$ yra atititinkamos nulio taško aplinkos. Toliau:

$$L_{k1}(t) := \frac{A^{\chi_k(t)-1}}{\Gamma(\chi_k(t))} h_{k1}(t), \quad L_{k2}(\tau) := \frac{A^{\chi_k(\tau)}}{\Gamma(-\chi_k(\tau))} h_{k2}(\tau),$$
$$\mu_{k1}(u) := \chi_k(u) - \gamma_0 - itE_{k1}, \quad \mu_{k2}(u) := \chi_k(u) - \gamma_0 - iuE_{k2}.$$

Dabar, kaip ir straipsnyje [6], parodome, kad netrivialiu laikytinas tik atvejis $\gamma_1 = \gamma_0$. T.y., $\chi_1(u) = \chi_0(u)$, $E_{11} = E_{01}$, $y_1 = y_0$, $\sigma_1 = \sigma_0$.

Teoremos sąlygos įgalina integraluose J_{kj} atlikti pakeitimą $it \to z := \log(1+\xi_0)+it$, jei tik ξ_0 yra pakankamai mažas skaičius. Parodysime, kad funkcijos

$$\exp\left\{\lambda^2\mu_{k1}(u) - iuy_k\lambda\right\} = \exp\left\{\lambda^2\left(\mu_{k1}(u) - iu\xi\right)\right\}$$

atitinkamose aplinkose $D_k(0)$ turi balno taškus.

Iš tikrųjų, kadangi funkcija

$$u(x) := \sum_{\nu,\nu\neq 0} \left((1+x)^{\log|\nu|} - \right)\log|\nu|\lambda_\nu - \xi$$

yra tolydinė, tai nagrinėdami, pavyzdžiui, atvejį $\xi > 0$, nesunkiai įsitikiname lygties $u(x) = 0$ sprendinio egzistencija, nes $u(0) = -\xi < 0$, o jau $u\left(\frac{2\xi}{\sigma_0^2}\right) > 0$. Be to, iš užrašo

$$u(x) + \xi := \sum_{\substack{\nu,\nu\neq 0\\ \log|\nu|>0}} \left((1+x)^{\log|\nu|} - 1\right)\log|\nu|\lambda_\nu + \sum_{\substack{\nu,\nu\neq 0\\ \log|\nu|<0}} \left(1 - (1+x)^{-|\log|\nu||}\right)|\log|\nu||\lambda_\nu$$

akivaizdu, kad intervale $\left(0, \frac{2\xi}{\sigma_0^2}\right)$ funkcija $u(x)$ monotoniškai didėja, taigi – turi *vienintelį* nulio tašką, tarkime $x = \xi_0$. Panašiai samprotaujame ir atveju $\xi < 0$.

Dabar kiekviename iš integralų, pavyzdžiui $J_{01}(t_0)$, išskyrę balno tašku ξ_0 nustatomą daugiklį $\exp\left\{\lambda^2 A(\xi_0)\right\}$, su

$$A(\xi_0) := \sum_{\nu,\nu\neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|}\lambda_\nu - \gamma_0 - (E_{01} + \xi)\log(1+\xi_0),$$

gauname

$$J_{01}(t_0) := \frac{e^{-it_0\log|m|}\exp\left\{\lambda^2 A(\xi_0)\right\}}{4\pi n^{\lambda_0}} \int_{D_1(0)} L_{k1}(t+t_0,\xi_0)\exp\left\{\lambda^2\left(B(\xi_0,t)\right)\right\} dt.$$

Čia $B(\xi_0, t) := \mu_{01}(t,\xi_0) - \left(\log(1+\xi_0) + it\right)\xi - A(\xi_0)$, o

$$\mu_{01}(t,\xi_0) := \sum_{\nu,\nu\neq 0} |\nu|^{\log(1+\xi_0)+it}\lambda_\nu - \gamma_0 - E_{01}\left(\log(1+\xi_0) + it\right).$$

Kadangi integraluose J_{kj} liekamųjų narių įverčiai gaunami taip pat, kaip ir darbe [3], tai lieka aptarti teoremos formulavime postuluotą pagrindinio nario išraišką.

Panaudodami teoremos sąlygas, pavyzdžiui, integralo $J_{01}(t_0)$ atveju gauname:

$$L_{01}(t+t_0,\xi_0) := \frac{A^{\chi_0(t,\xi_0)-1}}{\Gamma(\chi_0(t,\xi_0))} h_{01}(t+t_0,\xi_0).$$

Čia paeiliui:

$$\chi_0(t,\xi_0) := \sum_{\nu,\nu\neq 0} (1+\xi_0)^{\log|\nu|} e^{it\log|\nu|}\lambda_\nu = \gamma(\xi_0) + d_1(\xi_0)(it) + O(|t|^2),$$

$$A^{\chi_0(t,\xi_0)-1} = A^{\gamma(\xi_0)-1} + a_1(\xi_0)(it) + O\left(|t|^2\right),$$

$$d_1(\xi_0) := \sum_{\nu,\nu\neq 0} \lambda_\nu(1+\xi_0)^{\log|\nu|}\log|\nu|,$$

$$a_1(\xi_0) := d_1(\xi_0)\log A,$$

$$\Gamma^{-1}\left(\chi_0(t,\xi_0)\right) = \Gamma^{-1}\left(\gamma(\xi_0)\right)\left(1 + b_1(\xi_0)(it) + O\left(|t|^2\right)\right),$$

$$b_1(\xi_0) := Cd_1(\xi_0) + d_1(\xi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+\gamma(\xi_0)-1} - \frac{1}{k} \right),$$

$$h_{01}(t+t_0,\xi_0) := \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{||p||}\right)^{\chi_0(t,\xi_0)} \sum_{j\geqslant 0, g(p^j)\neq 0} \frac{f_k(p^j, t+t_0, \xi_0)}{||p||^j}$$

$$= \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{||p||}\right)^{\gamma(\xi_0)} \sum_{j\geqslant 0, g(p^j)\neq 0} \frac{f_k(p^j, t_0, \xi_0)}{||p||^j} + h^*(\xi_0)(it) + O(|t|).$$

Todėl ir

$$L_{01}(t+t_0,\xi_0) = A^{\gamma(\xi_0)-1} H_1^*(f_k,\xi_0) + L_{01}(t_0,\xi_0)(it) + O(|\xi_0| + t^2),$$

su nuo funkcijos g priklausančiu koeficientu $L_{01}(t_0,\xi_0)$, išreiškiamu per atitinkamus funkcijų $A^{\chi_0(t,\xi_0)-1}, \Gamma^{-1}(\chi_0(t,\xi_0)), h_{01}(t+t_0,\xi_0)$ skleidinių (it) laipsniais koeficientus $d_1(\xi_0), a_1(\xi_0), h^*(\xi_0)$.

Šios formulės ir pagrindžia pagrindinius teoremos įrodymo žingsnius.

Literatūra

[1] J. Knopfmacher, Analytic arithmetic of algebraic function fields, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, **50**, Dekker (1979).

[2] E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Lith. J. Math.*, **33**(3), 330–340 (1993) (in Russian).

[3] R. Skrabutėnas, On the distributions of values of multiplicative functions, *Lith. J. Math.*, **18**(3), 139–148 (1978) (in Russian).

[4] R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, In: *New Trends in Probab. and Stat.*, TEV Vilnius &VSP Utrecht, Tokyo, 363–370 (1997).

[5] R. Skrabutėnas, Local limit theorems for multiplicative functions on semigroups, *Lietuvos Matematikų Draugijos Mokslo Darbai*, II t., 61–68, Vilnius (1998).

[6] R. Skrabutėnas, Lokalieji multiplikatyviųjų funkcijų skirstiniai, *Lietuvos Matematikų Draugijos Mokslo Darbai*, III t., p. 86–92, Vilnius (1999).

The local limit theorem of large deviations for multiplicative functions

R. Skrabutėnas

In the present paper we continue investigation of the local distribution of multiplicative arithmetic functions from the class $M(G)$. A local theorem of large deviations is obtained.