Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 87–97
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33599

Mokyklinės matematikos terminų ir žymenų kritika

Robertas Vilkas

Vilniaus Vytauto Didžiojo gimnazija
Augustijonų g. 8, LT-01127 Vilnius, Lietuva
El. paštas: robertas.vilkas@gmail.com

Įteiktas 2023 liepos 9; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Pateikiama kai kurių mokyklinės matematikos terminių ir žymenų kritika bei pateikiamos rekomendacijos. Atskirai aptariama problema dėl dešimtainių trupmenų rašymo naudojant kablelį ir dėl to atsiradusio kabliataškio atskiriant tokius skaičius, kas prieštarauja ne tik tarptautiniams matematikos žymenims, bet ir lietuvių kalbos skyrybos taisyklėms. Plačiau aptariamas nekorektiškas elementariojo įvykio sąvokos naudojimas ne tik mokyklose, bet ir universitetuose.

Raktiniai žodžiai: žymenys; daugianaris; junginys; elementarusis įvykis; baigčių erdvė; lyginis skaičius

AMS: 97-XX

Įvadas

Matematika yra tarptautinė mokslo kalba, todėl žymenys turėtų būti kuo panašesni į tarptautinius.

1 Specialiosios skaičių aibės

Mokykliniuose vadovėliuose labai paplitęs aibių žymuo $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Problema su šiuo žymeniu yra ta, kad mokytojai (absoliuti dauguma, kiek pastebėjau tarp kolegų ir įvairių korepetitorių) rašo N, Z, Q, R, C, kas yra nekorektiška.

Kodėl pvz. R yra nekorektiškas žymuo? Todėl, kad raidėmis $A, B, C, \ldots$ mes paprastai žymime bet kokias aibes, t. y. jos yra tiesiog kintamieji. Pvz. gali būti $R = \{1, 2, 3\}$, $R = (0, +\infty)$ ir t. t. Be to, R dažnai yra apskritimo spindulio ilgis.

Kadangi nepatogu užrašyti $\mathbf{R}$, tai dažniausiai rašoma R. Ši problema yra nesunkiai išsprendžiama, jeigu naudosime standartinius žymenis „su dviguba kojele“, kurie naudojami matematikos straipsniuose (ar forumuose) ir daugumoje angliškų matematikos knygų (ypač nuo 2000 metų ir pan.) [9], [36, p. 2669], [37], t. y.

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}.$$

Pastaruosius yra paprasta užrašyti.

2 Kabliataškis ar kablelis atskiriant elementus?

Angliškose knygose yra rašomas kablelis [36]:

1. Baigtinė aibė: $\{1, 2, 3\}$;
2. Intervalas: $[1, 2]$, $[1, 2)$, $(1, 2]$, $(1, 2)$;
3. Vektorius: $(1, 2, 3)$;
4. Erdvės $\mathbb{R}^3$ taškas: $(1, 2, 3)$;
5. Dviejų kintamųjų funkcija $f(x, y)$ ir jos reikšmė taške $f(1, 2)$.

Kalbose, kuriose dešimtainės trupmenos užrašomos naudojant kablelį, atsiranda metodinė problema, nes aibė iš dviejų elementų $\{1, 2\}$ ir aibė iš vieno elemento $\{1{,}2\}$ atrodo panašiai. Todėl, manau, ir atsirado kabliataškis vietoje kablelio.

Nepaisant to, aš už tai, kad kabliataškis nebūtų naudojamas šiose vietose, nes

1. ***matematikos sintaksė neturėtų priklausyti nuo kalbos***,
2. formaliai prieštaros nėra, nes juk yra tarpas, t. y. $\{1, 2\}$ ir $\{1{,}2\}$ yra skirtingi objektai,
3. kabliataškio naudojimas padeda tik tuomet, kai išvardijami dešimtaine trupmena užrašyti skaičiai, bet skaičius 0,75 ir 0,(3) galima užrašyti paprastosiomis trupmenomis $\frac{3}{4}$ ir $\frac{1}{3}$. Nors statistikoje, užrašant imties realizaciją, šitas būdas nebūtų patogus, bet turiu omenyje, kad gana dažnai galima to išvengti, pvz. vietoje plokštumos taško $(0{,}75; 0{,}(3))$ užrašyti $(\frac{3}{4}, \frac{1}{3})$ ir pan.

Pogorelovas [27, p. 260] padarė kompromisą, *skaičius po kablelio* atskirdamas kabliataškiu, o visus kitus skaičius ar kintamuosius – kableliu:

57. 1) $(2,\ 1,\ -2)$; 2) $(4{,}5;\ 1{,}5;\ 0{,}5)$; 3) $(-2,\ -7,\ -28)$;

Toks pats kompromisas yra naudojamas ir kai kuriuose šiuolaikiniuose mokykliniuose vadovėliuose. Pvz. [10, p. 74]:

$$A = \{-3, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 7\}, \quad B = \{-2{,}5; -1; 0{,}1; 2{,}5; 4\}.$$

Analogiška situacija yra užrašant imties realizacijas šio vadovėlio 125 puslapyje:

$$2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 2, 5, 5,$$
$$1; 1{,}2; 1{,}8; 1{,}9; 1{,}4; 2; 1{,}5; 2; 1{,}8; 1{,}6; 1{,}1; 1{,}2.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad toks *kabliataškio* naudojimas ***prieštarauja lietuvių kalbos skyrybos taisyklėms***, nes valstybinės lietuvių kalbos komisijos tinklapyje https://vlkk.lt/vlkk-nutarimai/nutarimai/nutarimo-del-lietuviu-kalbos-taisykles yra toks sakinys: *Vienarūšės išvardijamosios sakinio dalys be jungtukų yra atskiriamos kableliais.*

Gali kilti klausimas ar skaičiai yra sakinio dalys? Lietuvių kalbos žinyne [11, p. 235] yra toks apibrėžimas (išrinkti esminiai sakiniai):

1 apibrėžimas. „Žodžiai, sakinyje atsakantys į tam tikrus klausimus, vadinasi *sakinio dalys*. Pvz.: Apie avilius tingiai dūzgė bitės. Kas dūzgė? – bitės. Ką veikė bitės? – dūzgė. Kur dūzgė? – apie avilius. Kaip dūzgė? – tingiai. Sakinio dalimi gali eiti tik savarankiškos reikšmės žodžiai – vieni arba drauge su prielinksniais, dalelytėmis. Sakinio dalis gali būti reiškiama ne tik vienu, bet ir dviem ar daugiau savarankiškų žodžių. Vieni tarnybiniai žodžiai (prielinksniai, jungtukai, dalelytės) sakinio dalių nesudaro".

Skaitvardžiai yra sakinio dalys, nes pvz. skaitvardis *trys ketvirtosios* sakinyje „liko trys ketvirtosios pyrago" yra atsakymas į klausimą: „kokia pyrago dalis liko, jeigu kažkas suvalgė ketvirtadalį?" Kadangi skaitvardis *trys ketvirtosios* reiškia skaičių $\frac{3}{4}$, tai skaičius $\frac{3}{4}$ yra sakinio dalis.

Remiantis 1 apibrėžimu gauname, kad bet koks skaičius yra sakinio dalis, nes galime sugalvoti klausimą, kurio atsakymas yra tas skaičius.

Skaitvardžiai (ir skaičiai) yra vienarūšės sakinio dalys, todėl išvardijant juos reikia atskirti būtent kableliu, o ne kabliataškiu, pvz.:
penki, šeši, septyni, ...
Todėl ir patys skaičiai turi būti atskiriami kableliu:
5, 6, 7, ...
Jeigu iš šių skaičių ištrauksime kvadratinę šaknį, tai taip atskirsime kableliu:
$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$
Skyryba turėtų nepasikeisti imant apytiksles reikšmes:
2,2, 2,4, 2,6, ...
O naudojant kabliataškį bus prieštaravimas lietuvių kalbos skyrybos taisyklėms:
2,2; 2,4; 2,6; ...

Tačiau tikrasis problemos sprendimas būtų visiškai pereiti prie tarptautinių žymenų, t. y. reikėtų dešimtaines trupmenas rašyti su tašku, o ne su kableliu, ir tuomet nebūtų poreikio rašyti kabliataškio.

3 Dešimtainės trupmenos su kableliu ar su tašku?

Universitetuose kai kurie dėstytojai jau seniai dešimtaines trupmenas rašo naudojant tašką. Tai praktiškai neišvengiama ne tik dėl angliškų vadovėlių įtakos, bet ir dėl kompiuterinių programų ar skaičiuotuvų įtakos. Jau nekalbant apie tarptautinių mainų programos studentus. O programavimo kalbose praktiškai visur yra taškas (juk būtų absurdiška išversti programavo kalbas į lietuvių kalbą).

Pvz. eilę metų teko KTU studentams vesti tikimybių teorijos ir statistikos pratybas ir per testus studentams reikėdavo įvesti skaičius naudojant būtent tašką, o ne kablelį, nes kitaip būdavo klaida. Tai dar viena priežastis.

Mokyklose PUPP ir VBE vertinimo instrukcijose (bendrųjų susitarimų lape) parašyta: „Jei skaičius užrašytas dešimtaine trupmena, bet vietoj kablelio parašytas taškas – to nelaikome klaida". Taigi, mes iš esmės jau leidžiame naudoti tašką ir mokyklose, trūksta tik jį įteisinti.

Didžiausios šalys (Kinija, Indija, JAV ir daugelis kitų) rašo dešimtainius skaičius su tašku: https://en.wikipedia.org/wiki/Decimal_separator.

Yra šalių (pvz. Luksenburgas, Šveicarija), kuriose oficialiai naudojami tiek taškas, tiek kablelis. Manau, kad tai būtų labai geras kompromisas Lietuvai.

Be to, naudojant tašką, **viskas atsistotų į savo vietas**:

1) nebereikėtų skaičių dirbtinai atskirti kabliataškiu,
2) nebūtų prieštaros tarptautinei matematikos sintaksei,
3) nebūtų prieštaros lietuvių kalbos skyrybos taisyklėms.

4 Aibės žymuo su vertikaliuoju brūkšniu ar dvitaškiu?

Šie du aibės žymenys yra labai paplitę:

1. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Sunku pasakyti, kuris žymuo yra labiau paplitęs, nes tikrai dažnai naudojamas tiek vienas, tiek kitas žymuo.

Tačiau pastebėjau tokią tendenciją: senesnėse knygose labiau paplitęs antrasis žymuo, o naujesniuose straipsniuose ar knygose labiau paplitęs pirmasis žymuo.

Priežastis gali būti ta, kad mes būtent dvitaškį, o ne vertikalųjį brūkšnį, naudojame teiginiuose, kur dvitaškis reiškia „toks, kad“ arba „galioja“:

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ (egzistuoja realusis x toks, kad $x^2 \geqslant 0$),
2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ (kiekvienam realiajam x galioja nelygybė $x^2 \geqslant 0$),
3. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0\}$ (aibė realiųjų x tokių, kad $x^2 \geqslant 0$).

Matome, kad čia viskas gražiai derinasi.

Dar dvi priežastys:

1. Jeigu norime užrašyti aibę sveikųjų skaičių k, su kuriais 7 dalija $2k+1$ (t. y. $2k+1$ dalijasi iš 7), tai $\{k \in \mathbb{Z} : 7 \mid 2k+1\}$ atrodo geriau, negu $\{k \in \mathbb{Z} \mid 7 \mid 2k+1\}$.
2. Jeigu norime užrašyti aibę realiųjų skaičių x, kurie tenkina nelygybę $|2x+1| < 1$, tai $\{x \in \mathbb{R} : |2x+1| < 1\}$ atrodo geriau, negu $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| < 1\}$.

Pasirodo, kad kai kuriuose vadovėliuose rašomas kablelis (iš pradžių atrodė, kad tai yra tik korektūros klaidos, bet vėliau pamačiau, kad ne viename vadovėlyje yra rašomas kablelis). Pvz. vadovėlyje [17, p. 24] yra parašyta

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

O vadovėlyje [29, p. 12] yra štai kas:

Racionaliųjų skaičių aibė $\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \boldsymbol{Z}, b \in \boldsymbol{N}\right\}$.
Iracionaliųjų skaičių aibė $\boldsymbol{I} = \left\{a \neq \frac{b}{c}, b \in \boldsymbol{Z}, c \in \boldsymbol{N}\right\}$.

Tai yra visiškai neteisingas aibių užrašymas, nes jis reiškia, kad tos aibės turi po 3 elementus (šie elementai yra reiškiniai arba predikatai). Paskutinio pavyzdžio atveju būtų nekorektiškas aibės užrašas net ir naudojant dvitaškį.

5 Kas yra dvinaris?

Pvz. knygoje [17, p. 119] yra uždavinys, kuriame reikia *dvinario kvadratą* $(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)^2$ išreikšti daugianariu.

Tai yra neteisingas daugianario (įskaitant dvinario) sąvokos naudojimas. Dvinaris yra atskiras *daugianario* atvejis, o daugianaryje visų kintamųjų laipsniai turi būti neneigiami *sveikieji skaičiai* [9, p. 2].

Pasirodo, kad kai kurie mokytojai naudoja neteisingą daugianario apibrėžimą, nes rusiškoje matematikos enciklopedijoje [32, p. 755] yra parašyta, kad tokia terminologija yra *kartais* naudojama. O būtent, po gana ilgo paaiškinamojo teksto apie daugianarius, paskutiniame sakinyje yra parašyta, kad kartais elementariojoje algebroje daugianariu yra laikomas algebrinis reiškinys, kuriame paskutinis veiksmas yra sudėtis. Šiuolaikinėje matematinėje literatūroje pastarasis apibrėžimas nėra naudojamas.

6 Rinkinys ar Junginys?

Kurį terminą reikėtų naudoti kombinatorikoje?

Pavyzdys: jeigu *renkame* grybus miške, tai gauname grybų *rinkinį*, t. y. aibę grybų ir čia tvarka yra nesvarbi. Rinkinys yra pateikiamas kaip *aibės* sinonimas J. Kubiliaus knygoje [21, p. 12], o aibėje tvarka nesvarbi.

Kitas pavyzdys: LEGO kaladėles sujungiame ir tokiu būdu gauname *junginį* ir čia tvarka yra svarbi (atskiru atveju, gali būti tvarka nesvarbi, pvz. kai kaladėlės yra vienodo dydžio ir vienodos spalvos). Kiti junginių pavyzdžiai: raidžių junginys yra žodis, skaitmenų junginys yra skaičius.

Visi aukščiau pateikti pavyzdžiai, manau, gerai iliustruoja, kodėl kombinatorikoje geriau tinka terminas junginys, o ne rinkinys.

Terminas *junginys* naudojamas universitetiniuose vadovėliuose ir senesniuose mokykliniuose vadovėliuose, pvz. [2, 5, 7, 20, 22, 23, 30]. R. Balaišis netgi pačią kombinatoriką pateikia kaip junginių teorijos sinonimą [5, p. 303]. J. Kubilius junginio sąvoką aiškiai apibrėžia [22, p. 28]:

2 apibrėžimas. Tarkime, kad turime keletą elementų $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Bet kuris duotųjų elementų rinkinys $a_{k_1}, a_{k_1}, \ldots, a_{k_s}$ yra vadinamas *junginiu* (kombinacija). Tarp parinktųjų elementų gali būti ir pasikartojančių; jų tvarka gali būti svarbi, gali ir neturėti reikšmės.

1966 metų mokykliniame vadovėlyje [2, p. 333] yra toks apibrėžimas:

3 apibrėžimas. Įvairios daiktų grupės, besiskiriančios daiktų eile arba pačiais daiktais, sudaro junginius. Patys daiktai vadinami junginių *elementais*. Sudarytieji junginiai gali skirtis vieni nuo kitų arba pačiais elementais, arba elementų išdėstymo eile.

Naujesniuose mokykliniuose vadovėliuose ar mokymo priemonėse atsirado terminas rinkinys, pvz. [4, 16, 18, 24]. Vadovėlyje [3] pateikiami abu terminai.

Anglų kalba parašytuose vadovėliuose junginio sąvokos analogas beveik niekur neapibrėžiamas atskirai, tik iš konteksto būna aišku kuris žodis atitinka šią sąvoką, be to, nėra vieningos terminologijos. Palyginkime lietuviškus ir angliškus kombinatorikos terminus 1 lentelėje:

1 lentelė.

Junginys: [2, 3, 5, 7, 20, 22, 23, 30] Rinkinys: [3, 4, 16, 18, 24]	Selection: [6, p. 46], [15, 28] Arrangement: [36, p. 126] Sampling: [8, p. 34]
Gretinys: beveik visi autoriai	Arrangement: [31, p. 18] k-permutation: [1, p. 10], [6, 28]
Kėlinys: beveik visi autoriai	Permutation: beveik visi autoriai
Derinys: beveik visi autoriai	Combination: beveik visi autoriai

Termino *selection* vertimas yra *rinkinys*, tačiau siūlau laikytis termino, kuris naudojamas universitetiniuose vadovėliuose [7, 20, 22, 30], t. y. *junginys* (aukščiau pateikti pavyzdžiai yra dar viena priežastis).

7 Kas yra elementarusis įvykis?

Problema ta, kad *elementariojo įvykio* ir *eksperimento baigties* sąvokos absoliučioje daugumoje mokyklinių vadovėlių yra painiojamos.

Pvz. vadovėlyje [3, pp. 22–23] galima rasti keistų sąvokų: 1) *baigties tikimybė*, 2) *baigčių sąjunga*, 3) *baigtys yra atsitiktiniai įvykiai.*

O knygelėje [26, p. 37] galime rasti štai ką:

> **2.7 pavyzdys.** Metame lošimo kauliuką. Elementariųjų įvykių aibę užrašome taip:
>
> $$E = \{ E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 \} .$$
>
> Aišku, kad E_1 = „Iškrito viena akutė", E_2= „Iškrito dvi akutės" ir t.t. Įvykį A = „Iškrito dvi arba trys akutės" galima užrašyti taip:
>
> $$A = \{ E_2, E_3 \} = E_2 \cup E_3 .$$

Bet yra ir anglų kalba parašytų knygų, kuriose yra analogiškų dalykų, pvz. [34, p. 29] yra tokia eilutė:

$$A = \{E_1, E_3, E_5\} \quad \text{or} \quad A = E_1 \cup E_3 \cup E_5.$$

Šios klaidos yra pasekmė to, kad elementarusis įvykis sutapatinamas su eksperimento baigtimi. Be to, jeigu elementariuoju įvykiu yra laikomas ω_k, o ne $E_k = \{\omega_k\}$, tai tuomet elementarusis įvykis ω_k nėra *atsitiktinis įvykis*, nes nėra aibės $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ poaibis. Bet tuomet ir apie elementariojo įvykio tikimybę negalėtume kalbėti, nes tikimybė yra funkcija, kurios argumentas turi būti aibė.

Bet problema yra žymiai gilesnė, nes netgi J. Kubilius [22] naudoja šią netinkamą terminologiją ir turbūt todėl lietuviškuose vadovėliuose aptinkame tokią terminiją. Dar daugiau, A.N. Kolmogorovas 1933 m. savo garsioje knygoje ([19] yra vertimas), kurioje jis suformulavo aksiominį tikimybės apibrėžimą (kuriame, mano požiūriu, visa esmė ir buvo ta, kad į atsitiktinius įvykius pradėta žiūrėti kaip į aibes), taip pat netinkamai naudoja elementariojo įvykio sąvoką.

Labai teisinga kritika Kolmogorovo terminologijos atžvilgiu yra išsakyta P.E. Pfeiffer knygoje [25, p. 28]:

> "It is important to distinguish between the *elementary outcome* ξ and the *elementary event* $\{\xi\}$ whose only member is the elementary outcome ξ.

> Whenever the result of a trial is the elementary outcome ξ, the elementary event $\{\xi\}$ occurs; so also, in general, do many other events. We have here an example of the necessity in set theory of distinguishing logically between an element ξ and the single-element set $\{\xi\}$. The reader should be warned of an unfortunate anomaly in terminology found in much of the literature. In his fundamental work, Kolmogorov [1933, 1956] used the term elementary event for the elementary outcome ξ; he used no specific term for the event $\{\xi\}$. Although he does not confuse logically the elementary outcome with the event $\{\xi\}$, his terminology is inconsistent at this point".

Čia Pfeiffer terminas *elementary outcome* yra sinonimas terminui *outcome*, kurį dauguma autorių naudoja. Pfeiffer turbūt norėjo akcentuoti tai, kad vietoje Kolmogorovo *elementary event* geriau tinka *elementary outcome*, t. y. kad būtent *event* reikia pakeisti į *outcome*.

Metodinių netobulumų, susijusių su elementariais įvykiais, yra ir pas kitus žinomus tikimybių teorijos specialistus. Pvz. W. Felerio knygoje [12, p. 22] baigtys žymimos E_k, tačiau tikimybė žymima $P\{E_k\}$, o ne $P(\{E_k\})$:

> **Fundamental Convention.** *Given a discrete sample space* $\mathfrak{S}$ *with sample points* $E_1, E_2, \ldots$, *we shall assume that with each point* E_j *there is associated a number, called the probability of* E_j *and denoted by* $\mathbf{P}\{E_j\}$. *It is to be non-negative and such that*
>
> (7.1) $$\mathbf{P}\{E_1\} + \mathbf{P}\{E_2\} + \cdots = 1.$$

Čia atrodytų, jog, trumpumo dėlei, buvo nerašomi paprastieji skliausteliai, bet Felerio knygoje aplamai bet kurio įvykio tikimybei tik riestiniai skliausteliai naudojami:

> **Definition.** *The probability* $\mathbf{P}\{A\}$ *of any event* A *is the sum of the probabilities of all sample points in it.*
>
> (7.3) $$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2\} \le \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\}.$$

Šie žymenys yra klaidinantys, nes atrodo, kad atskiru atveju galime imti $A = E_k$, kas yra nekorektiška, nes A yra įvykis (todėl aibė), o E_k yra baigtis (aibės elementas).

Kokie yra teisingi atsitiktinių įvykių ir jų tikimybių žymenys? Nemažai šiuolaikinių tikimybių teorijos knygų naudoja teisingus žymenis, pvz. Masačusetso technologijos instituto matematikai Bertsekas ir Tsitsiklis pateikia tokį pavyzdį [6, p. 10]:

> **Example 1.2.** Consider an experiment involving a single coin toss. There are two possible outcomes, heads (H) and tails (T). The sample space is $\Omega = \{H, T\}$, and the events are
> $$\{H.T\},\ \{H\},\ \{T\},\ \emptyset.$$
> If the coin is fair, i.e., if we believe that heads and tails are "equally likely," we should assign equal probabilities to the two possible outcomes and specify that $\mathbf{P}(\{H\}) = \mathbf{P}(\{T\}) = 0.5$. The additivity axiom implies that
> $$\mathbf{P}\big(\{H,T\}\big) = \mathbf{P}\big(\{H\}\big) + \mathbf{P}\big(\{T\}\big) = 1,$$

Tačiau kitame šios knygos puslapyje yra įvestas toks žargonas (nors toje knygoje juo retai naudojamasi):

> Note that we are using here the simpler notation $\mathbf{P}(s_i)$ to denote the probability of the event $\{s_i\}$, instead of the more precise $\mathbf{P}(\{s_i\})$. This convention will be used throughout the remainder of the book.

Galbūt galima būtų tokį žargoną naudoti, bet ***vadovėlyje būtina parašyti ir teisingą žymenį***. Tačiau po tokio susitarimo natūraliai atsiras dar blogesnis žargonas „baigties tikimybė“ ir tuomet atsiras klaidos.

Pvz. bus 1) rašoma $P(H)$ vietoje $P(\{H\})$ ir 2) sakoma „baigties H tikimybė“ vietoje „įvykio $\{H\}$ tikimybė“, o dar blogiau, 3) bus sakoma „įvykio H tikimybė“, 4) ir tuomet bus rašoma $H \cup T$, t. y. kalbama apie „baigčių sąjungą“, 5) ir galiausiai baigtis H ir atitinkamas atsitiktinis įvykis $\{H\}$ bus sutapatinami.

Todėl ***mokykloje siūlyčiau vengti šių žargonų***, nes įvedus šiuos žargonus vis tiek teks nemažai papildomo laiko skirti aiškinant koks yra tikslus žymuo ar terminas, o rezultatas bus toks, kad žargonas naudos neduos (mokiniai tikrai painiojasi, kai naudojami skirtingi žymenys ir skirtingi terminai).

Angliškose knygose vietoje *elementary event* [25, p. 29] kartais naudojamas terminas *simple event* [14, p. 45], [34, p. 27]. Feleris [12, p. 8] taip pat naudoja *simple event*, tačiau netinkama prasme, t. y. analogiškai kaip Kolmogorovas ar Kubilius naudoja *elementariojo įvykio* sąvoką. Bet yra nemažai angliškų knygų, kuriose atsitiktiniams įvykiams, kurie yra aibės iš vienos baigties, nesuteikiamas joks pavadinimas, pvz. [6].

8 O kaip dėl elementariųjų įvykių erdvės?

Terminas *elementariųjų įvykių erdvė* yra netinkamas, nes šis pavadinimas reiškia, kad šios erdvės taškus, t. y. aibės Ω elementus, reikia vadinti elementariaisiais įvykiais, bet pastarieji nėra aibės Ω poaibiai, todėl nėra atsitiktiniai įvykiai. Laimei, absoliučioje daugumoje anglų kalba parašytų tikimybių teorijos knygų, vietoje termino *elementariųjų įvykių erdvė* yra naudojamas *baigčių erdvės* (*sample space*) terminas, kuris labai gerai tinka (šios erdvės taškai yra iš tiesų baigtys ir tai nėra ir neturi būti įvykiai). Todėl siūlau naudoti terminą *baigčių erdvė*.

9 Ar -2 yra lyginis skaičius?

Pasirodo, kad nemažai matematikos mokytojų tik aibės $\{2k : k \in \mathbb{N}\}$ elementus laiko lyginiais skaičiais, t. y. skaičiaus -2 nelaiko lyginiu arba tuo abejoja. Ši keista situacija susiklostė turbūt todėl, kad populiariose V. Mockaus knygose lyginio skaičiaus sąvoka yra kažkodėl apibrėžta tik teigiamiems skaičiams [23, 24].

Lyginiai skaičiai yra aibės $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ elementai [36, p. 974], t. y. tokie sveikieji skaičiai, kurie dalijasi iš 2. Be to, skaičiaus $m \in \mathbb{N}$ kartotinių aibės žymuo $m\mathbb{Z}$ yra įprastas algebroje. Pvz. grupės $(\mathbb{Z}, +)$ faktorgrupės $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ elementai yra aibės $m\mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z} + 1$, $\dots$, $m\mathbb{Z} + m - 1$ [35, p. 17]. Aplamai, tiek algebroje, tiek funkcinėje analizėje yra įprastas bendras žymuo:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Atskiru atveju, gauname lyginių skaičių aibę $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ ir nelyginių skaičių aibę $2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} - 1$. Jeigu nagrinėjami tik natūralieji skaičiai, tai lyginių skaičių aibė yra $2\mathbb{N} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$, tačiau jeigu keliamas klausimas, ar skaičius -2 yra lyginis, tai tuomet *nėra nagrinėjami tik natūralieji skaičiai* ir todėl atsakymas turi būti toks: taip, skaičius -2 yra lyginis.

10 Iracionaliųjų skaičių aibės žymuo

Kai kuriuose vadovėliuose ir mokymo priemonėse iracionaliųjų skaičių aibė žymima I, $\mathbf{I}$ arba $\mathbb{I}$, pvz. [17, p. 26], [24, p. 12], [29, p. 12]. Šie žymenys nėra plačiai naudojami, be to, nėra ir poreikio, nes juk yra paprasta užrašyti $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ir pastarasis yra tikrai plačiai naudojamas. Be to, tai yra viena iš priežasčių panaudoti aibių skirtumą, todėl labai gerai tinka ir dėl metodinių priežasčių.

Kita priežastis yra ta, kad galima kalbėti ir apie kompleksinius iracionaliuosius skaičius, tokiais atvejais žymuo $\mathbb{I}$ (ir kiti jo analogai) netenka prasmės. Negana to, kompleksinius iracionaliuosius skaičius kai kurie autoriai supranta visai kitaip [13]. Todėl mokyklose iracionaliųjų skaičių aibę labiausiai tinka žymėti $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

11 Vienetų rašymo skliausteliuose taisyklė

Pasirodo, kad yra tokia taisyklė, kuria naudojasi kai kurie fizikos, chemijos ir matematikos mokytojai (t. y. to reikalauja iš mokinių):
jeigu tarpiniuose skaičiavimuose vienetai nerašomi, tai tuomet užrašant galutinį atsakymą vienetus reikia būtinai apskliausti.

Pvz. jei $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, tai $AB + BC$ skaičiavimą galime užrašyti dviem būdais:

1. $AB + BC = 2\ \mathrm{cm} + 3\ \mathrm{cm} = 5\ \mathrm{cm}$,
2. $AB + BC = 2 + 3 = 5\ (\mathrm{cm})$.

O toks būdas jau laikomas „neteisingu“:

3. $AB + BC = 2 + 3 = 5\ \mathrm{cm}$

Keistas reikalavimas, bet Vygodskio žinyne [33, p. 418] yra toks pavyzdys: $a = 0{,}528$ m, $c = 0{,}697$ m

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0{,}697^2 - 0{,}528^2} = 0{,}455\ (\mathrm{m}).$$

Bet kam tie pertekliniai skliausteliai? Nerašykime jų. Angliškose knygose nepastebėjau, kad tie skliausteliai būtų rašomi.

Literatūra

[1] M. Aigner. *A Course in Enumeration.* Springer, Berlin, 2007.

[2] M. Aleksiūnas, B. Godvaiša, M. Gotleras, A. Juška. *Matematika, vadovėlis specialiosioms vidurinėms mokykloms.* Mintis, Vilnius, 1966.

[3] A. Ambraškienė, R. Grigelienė, V. Šaltenis, J. Šulčienė, B. Vasylienė, M. Vosylienė. *Matematika, vadovėlis gimnazijų 10 klasei, antroji knyga.* Šviesa, Kaunas, 2011.

[4] I. Bagdonienė, J. Knyvienė, A. Plikusas, K. Pulmonas, J. Šinkūnas. *Matematika 10, 1 dalis.* TEV, Vilnius, 2001.

[5] R. Balaišis. *Matematikos uždavinynas.* Šviesa, Kaunas, 1996.

[6] D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis. *Introduction to Probability.* Athena Scientific, Massachusetts, 2008.

[7] K. Bulota, P. Survila. *Algebra ir skaičių teorija,* 1 tomas. Mokslas, Vilnius, 1989.

[8] P. J. Cameron. *Notes on Counting: An Introduction to Enumerative Combinatorics.* Cambridge University Press, United Kingdom, 2017.

[9] D.A. Cox, J. Little, D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Springer, London, 2015.

[10] V. Dabrišienė, M.M. Vosylienė, A. Apynis, I. Knyzelienė, E. Tumėnaitė, V. Šileikienė. *Matematika 12 klasei, II dalis.* Tempus. Šviesa, 2017.

[11] V. Dobrovolskis, P. Kniūkšta, A. Kučinskaitė, A. Paulauskienė, A. Ryklienė, B. Stundžia, D. Tarvydaitė. *Lietuvių kalbos žinynas.* Šviesa, Kaunas, 1998.

[12] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. John Wiley & Sons, New York, 1968.

[13] L.R. Ford. *Rational Approximations to Irrational Complex Number.* Transactions of the American Mathematical Society, New York, 1918. https://www.jstor.org/stable/1988849.

[14] S. Goldberg. *Probability: An Introduction.* Dover Publications, New York, 1986.

[15] M. Hall. *Combinatorial Theory.* John Wiley & Sons, New York, 1986.

[16] K. Intienė, V. Meškauskaitė, R. Rudalevičienė, A. Vilimienė, V. Vanagas. *Matematika, 10 klasė, 2 dalis.* Tau+. TEV, Vilnius, 2016.

[17] J. Knyvienė, A. Apynis, I. Brazauskienė, R. Dranseikienė, N. Zdanienė. *Matematika 9, I dalis.* Tempus. Šviesa, 2020.

[18] J.G. Knyvienė, I. Brazauskienė, R. Dranseikienė, J. Gedminienė, A. Mažuolienė, D. Riukienė, I. Šukienė, V. Kravčenkienė. *Matematika, vadovėlis 10 klasei, 2 dalis.* Tempus. Šviesa, Kaunas, 2021.

[19] A.N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability.* Chelsea Publishing Company, New York, 1956.

[20] A. Krylovas. *Matematika.* Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1994.

[21] J. Kubilius. *Realaus kintamojo funkcijų teorija.* Mintis, Vilnius, 1970.

[22] J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika.* Vilniaus universiteto leidykla, Vilnius, 1996.

[23] V. Mockus. *Matematikos atmintinė moksleiviams.* V. Mockaus įmonė, 2004.

[24] V. Mockus. *Matematikos formulių ir taisyklių rinkinys moksleiviams.* V. Mockaus įmonė, Šiauliai, 2022.

[25] P.E. Pfeiffer. *Concepts of Probability Theory.* Dover Publications, New York, 1978.

[26] A. Plikusas. *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys.* Šviesa, Kaunas, 1993.

[27] A. Pogorelovas. *Geometrija 7–12.* Šviesa, Kaunas, 1988.

[28] J. Riordan. *An Introduction to Combinatorial Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1967.

[29] D. Riukienė, Ž. Stundžienė. *Matematika, 11 klasė.* Tau+. TEV, Vilnius, 2016.

[30] R. Skrabutėnas. *Algebra ir skaičių teorija,* 1 tomas. Vilniaus pedagoginis universitetas, Vilnius, 2004.

[31] J.V. Uspensky. *Introduction to Mathematical Probability*. McGraw-Hill, New York and London, 1937. https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.263184/page/n25/mode/2up.

[32] I.M. Vinogradov. *Matematičeskaja enciklopedija*, volume 3. Sovetskaja enciklopedija, Maskva, 1982.

[33] M. Vygodskis. *Elementarinės matematikos žinynas*. Šviesa, Kaunas, 1966.

[34] D.D. Wackerly, W. Mendenhall III, R.L. Scheaffer. *Mathematical Statistics with Applications*. Thomson, Duxbury, 2008.

[35] A.R. Wadsworth. *Problems in Abstract Algebra*. AMS, Providence, 2017.

[36] E.W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Chapman & Hall, CRC Press, Boca Raton, 2003.

[37] V. Čekanavičius. *Approximation Methods in Probability Theory*. Springer, Switzerland, 2016.

SUMMARY

A critique of terms and symbols in school mathematics

R. Vilkas

Criticism of some terms and symbols of school mathematics is presented, and recommendations are given. The problem of writing decimal fractions using a comma and the resulting semicolon when separating such numbers, which contradicts not only the international symbols of mathematics, but also the general rules of the Lithuanian language, is discussed separately. The incorrect use of the concept of an elementary event not only in schools, but also in universities, is discussed in more detail.

Keywords: notations; polynomial; elementary event; sample space; even number