Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 615–620

Dirichle sąlygos atstatymas elektrodinamikos uždavinyje, aprašančiame anizotropiškai laidžią terpę

Vytautas KLEIZA (MII), Silvija SĖRIKOVIENĖ (KTU)
el. paštas: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt, serikoviene@centras.lt

1. Reali situacija ir matematinis modelis

Nagrinėjamas kraštinis uždavinys, nusakantis elektrinio lauko potencialo pasiskirstymą plokščiame homogeniniame ir anizotropiškai laidžiame bandinyje. Tegul

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

– bandinio savito laidumo tenzorius, ir $\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0$, o $\varphi(x, y)$ dvimačio lauko potencialas. Tada potencialo $\varphi(x, y)$ pasiskirstymas yra kraštinio uždavinio

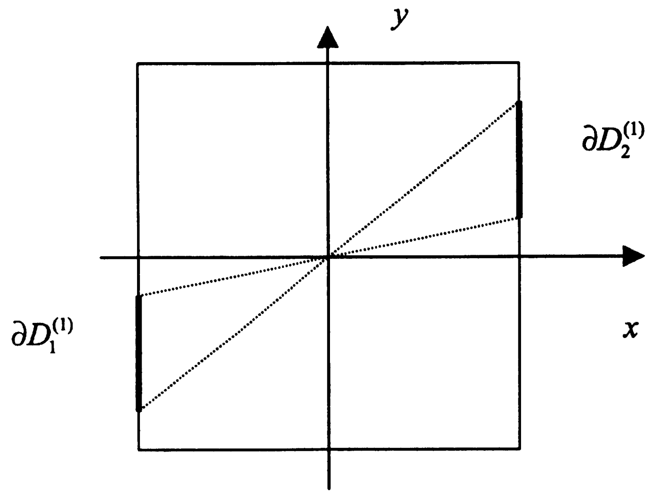
$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma\operatorname{grad}\varphi = 0, & (x,y) \in D \\ \left.\begin{matrix} \varphi(x,y) = c_j, & (x,y) \in \partial D_j^{(1)} \\ (\sigma\operatorname{grad}, \mathbf{n}) = 0, & (x,y) \in \partial D_j^{(2)} \end{matrix}\right\}, & j = \overline{1,N}, \\ \varphi \in C^0(\bar{D}), \\ \bigcup\limits_{j=1}^{N} \left(\partial D_j^{(1)} \cup \partial D_j^{(2)}\right) = \partial D, \quad \bigcap\limits_{j=1}^{N} \partial D_j^{(1)} \cap \bigcap\limits_{j=1}^{N} \partial D_j^{(2)} = \varnothing, \end{cases}$$

sprendinys. Tada $\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi(x, y)$ – elektrinio lauko stiprio vektorius, $\bigcup\limits_{j=1}^{N} \partial D_i^{(1)}$ – kontūro dalis, kurią užima pritvirtinti kontaktai, $\bigcup\limits_{j=1}^{N} \partial D_i^{(2)}$ – likusi srities D kontūro dalis, $\mathbf{n}$ – vienetinis išorinės normalės vektorius.

Šiame darbe nagrinėjama kraštinio uždavinio (1) skaitinė realizacija tuo atveju, kai $N = 2$, o plokščia sritis D – kvadratas, kurio kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims, o centras sutampa su koordinačių pradžia (1 pav.).

Aprašomo metodo paskirtis – potencialo $\varphi(x, y)$ atstatymas visame srities D kontūre, kai D kvadratas su dviem simetriškai (centro atžvilgiu) išdėstytais kontaktiniais elektrodais.

Toks uždavinys esti aktualus, kai praktikos tikslams reikia rasti (1) sprendinį ne visoje srityje $\bar{D}$, o nusakytoje jos dalyje, arba tik duotą sprendinio funkcionalą. Suprantama, kad



1 pav.
Bandinys ir kontaktiniai elektrodai.

klasikiniai skaitiniai metodai (baigtinių skirtumų, baigtinių elementų) yra globaliniai. Be to siūlomas metodas įgalina suvesti Neimano uždavinį į Dirichle uždavinį (suradus potencialo vertes ant kontūro dalių $\partial D_i^{(2)}$) ir spręsti pastarąjį ženkliai efektyvesniais skirtuminiais metodais.

2. Modelio tyrimas

Jei sritis $D = \left\{|x| \leqslant \frac{1}{2};\ |y| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, o kontaktinių elektrodų išdėstymas ir jų potencialai

$$\partial D_1^{(1)} = \left\{x = -\frac{1}{2},\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\right\}, \quad \partial D_1^{(2)} = \left\{x = \frac{1}{2},\ -y_1 \leqslant y \leqslant -y_2\right\},$$
$$\bigcup_{j=1}^{2} D_j^{(2)} = \partial D \setminus \bigcup_{j=1}^{2} D_j^{(1)}, \quad c_j = (-1)^j,$$

tai ieškomas potencialas $\varphi(x, y)$ yra kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} \sigma_{11}\varphi_{xx} + 2\sigma_{12}\varphi_{xy} + \sigma_{22}\varphi_{yy} = 0, \\ \varphi\,|_{\partial D_j^{(1)}} = (-1)^j, \\ (\sigma \operatorname{grad}\varphi, \mathrm{n})\,|_{\partial D_j^{(2)}} = 0, \quad j = 1, 2, \end{cases} \tag{1}$$

sprendinys.

Tiesinė transformacija

$$\begin{cases} \xi = \sigma_{11}\left(y + \dfrac{1}{2}\right) - \sigma_{12}\left(x + \dfrac{1}{2}\right), \\ \eta = \sqrt{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

suveda uždavinį (1) kraštinį uždavinį lygčiai

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \quad (\xi, \eta) \in \widetilde{D}, \\ \varphi\big|_{\partial \widetilde{D}_j^{(1)}} = (-1), \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial \widetilde{D}_j^{(2)}} = 0, \quad j = 1, 2, \end{cases} \tag{2}$$

čia $\widetilde{D}$ – transformuota sritis.

Tegul $z = \xi + i\eta$, tada, įvykdžius konforminį atvaizdį (kuris, kaip žinoma, nekeičia Laplaso operatoriaus) $\zeta = f^{-1}(z)$

$$f(\zeta) = \mu \int\limits_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta)^{-\alpha} (1 - k\zeta)^{\alpha-1} \,\mathrm{d}\zeta, \quad \zeta = t + is,$$

sritis $\widetilde{D}$ atvaizduojama į viršutinę kompleksinės plokštumos G pusplokštumę ir uždavinio (2) kraštinės sąlygos tampa tokiomis:

$$\begin{cases} \varphi(t, 0) = (-1)^j, \quad t \in (t_j, \tau_j) \in \mathrm{R}^1, \\ \dfrac{\partial \varphi(t, 0)}{\partial s} = 0, \quad t \in (\tau_j, t_{j+1}) \in \mathrm{R}^1, \quad j = 1, 2, \end{cases}$$

čia $-\infty < t_1 < \tau_1 < t_2 < \tau_2 < \infty$ ir $(\tau_2, t_3) = (\tau_2, \infty) \cup (-\infty, t_1)$.

Tegul

$$\mu = \frac{\sigma_{11}}{F(k)}, \quad F(k) = \int t^{\alpha-1} (1 - t)^{-\alpha} (1 - kt)^{\alpha-1} \,\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

$$\alpha = \begin{cases} +\dfrac{1}{\pi}\left(\pi - \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}}{\sigma_{12}}\right)\right), & \sigma_{12} > 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \sigma_{12} = 0, \\ -\dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}}{\sigma_{12}}\right), & \sigma_{12} < 0, \end{cases}$$

čia k yra lygties

$$F(k) - CF(1 - k) = 0, \quad C = \sqrt{\sigma_{11}/\sigma_{22}} \tag{3}$$

šaknis.

Potencialo $\varphi(t)$ atstatymui taške θ $(\tau_1 < \theta < t_2)$ realioje ašyje t turime elipsinį integralą (3)

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= 2a\int_{\tau_1}^{\theta}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-t_1)(t-t_2)(t-\tau_1)(t-\tau_2)}} - 1\\ &= 2am\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}},\end{aligned} \tag{4}$$

čia

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{(t_2-t_1)(\theta-\tau_1)}{(t_2-\tau_1)(\theta-t_1)}},\quad m = \frac{2}{\sqrt{(\tau_2-\tau_1)(t_2-t_1)}},$$

$$b^2 = \frac{(\tau_2-t_1)(t_2-\tau_1)}{(\tau_2-\tau_1)(t_2-t_1)},\quad a = \left(m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}}\right)^{-1}.$$

Dėka to, kad pasirinktam taškui $\theta, (\tau_1 < \theta < t_2)$ atitinka griežtai apibrėžtas taškas srities D krašte $\partial D_1^{(2)}$, o $\varphi(\theta)$ vertė nusakyta (4), tuo pat bus žinomas potencialo bet kokiame taške priklausančiame $\partial D_1^{(2)}$. Suprantama, kad uždavinio (2) sprendinys tenkina antisimetrijos sąlygą

$$\varphi(x,y) = -\varphi(-x,-y), \tag{4.1}$$

todėl potencialas ant $\partial D_1^{(2)}$ atstatomas lygybės (4.1) pagalba.

3. Algoritminė realizacija

Aprašyto uždavinio sprendimui naudojamas toks skaičiavimo algoritmas.

1. Lygties (3) sprendimas

Funkcija $\Phi(k) = F(k) - cF(1-k)$ – apibrėžta ir griežtai didėjanti intervale (0,1), (reikšmių sritis $(-\infty,\infty)$), todėl lygtis (3) intervale (0,1) turi vienintelę šaknį k^*. Šios šaknies radimui naudojamas besąlygiškai konverguojantis metodas. Konstruojama seka

$$k_i = \sum_{q=1}^{i} 2^{-q}\mathrm{sgn}\Phi(2^{-q}),\quad k_n = 2^{-1} \pm 2^{-2} \pm 2^{-3} \pm \ldots \pm 2^{-n},$$

tada $k_i \to k^*$, o paklaida kiekviename žingsnyje neviršija 2^{-i}, t.y.

$$|k^* - k_i| < \varepsilon_i \leqslant 2^{-i}.$$

Funkcijos $\Phi(k)$ vertės taškuose $k = 2^{-q}$ randamos iš skleidinio

$$F(k) = \sum_{n=0}^{M} \frac{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma^2(n+1)} k^n \approx \sum_{n=0}^{M} a_n, \tag{4.2}$$

čia

$$a_0 = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad a_n = \frac{(n-\alpha)(n-1+\alpha)}{n^2} \cdot k \cdot a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, M. \tag{4.3}$$

Dabar nesunku įvertinti paklaidą, t.y., jei norima pasiekti tikslumą ε_F

$$\left| F(k) - \sum_{n=0}^{M} a_n \right| = \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n < \varepsilon_F, \tag{4.4}$$

tai

$$M = \left[\frac{\ln(\varepsilon_F(1-k))}{\ln k} - 1 \right].$$

2. Taškų, atitinkančių duotus taškus kontūro dalyje $D_1^{(2)}$, vaizdų radimas ant realiosios ašies t

Tegul išrinktas taškas $(x, y) \in \partial D_1^{(2)}$ yra ant $x = -\frac{1}{2}$ krašto. Norint rasti jo vaizdą ant realiosios ašies t būtina išspręsti lygtį

$$\int_0^{\theta} t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1-kt)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t - (y+0,5)\,F(k) = 0 \tag{5}$$

atžvilgiu θ. Pertvarkius šį netiesioginį integralą, turime

$$\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^{-\alpha}\left(1-k\frac{\beta}{2}\right)^{\alpha-1}\frac{\beta^2}{2} + \int_{\beta}^{\theta} t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1-kt)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t - (y+0,5)\,F(k) = 0, \tag{5.1}$$

o, kad tokio pertvarkymo paklaida neviršytų ε_j, užtenka paimti

$$\beta = (\alpha \cdot \varepsilon_J)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \tag{5.2}$$

Kairioji lygybės (5) pusė – griežtai didėjanti argumento θ funkcija intervale $(\beta, 1)$, todėl lygties (5) sprendimui taikytinas aukščiau aprašytas metodas.

Sprendžiant netiesines lygtis (3) ir (5) tenka daug kartų skaičiuoti netiesioginius integralus su laipsniniais singuliariškumais, todėl čia naudojami specialūs aukšto efektyvumo skaičiavimo algoritmai [1].

Literatūra

[1] V. Kleiza, J. Kleiza, The properties and evaluation of an integral with power singularities, *Comput. Maths Math. Phys.*, **10**(32), 1399–1411 (1992).

Determination of the Dirichlet condition in an electrodynamic problem describing the anyzotropically conductive medium

V. Kleiza, S. Sėrikovienė

The paper deals with the problem of potential determination on a plain domain, using the conformal mapping theory.