

Система уравнений Шредингера с неоднородной нелинейной частью

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)

e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

В настоящей работе рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = ia_k \Delta u_k + f_k(u, u^*), \quad t > 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u_k(0, x) = u_{k0}(x). \quad (2)$$

Здесь $x \in R^n$, a_k , $k = 1, \dots, m$, – отличные от нуля действительные постоянные, Δ – оператор Лапласа, f_k – гладкие действительные функции $2m$ переменных, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \quad \operatorname{Re} \left(\sum f_k u_k^* \right) = 0, \quad (3)$$

2) существуют отличные от нуля действительные постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такие, что

$$2\operatorname{Im} \left(\sum \alpha_k f_k \nabla_{x,t} u_k^* \right) = \nabla_{x,t} \phi(u, u^*), \quad (4)$$

здесь $\nabla_{x,t} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial t)$, функция $\phi(u, u^*)$ такая, что

$$\alpha_k f_k = i \frac{\partial \phi}{\partial u_k^*}, \quad \alpha_k f_k^* = -i \frac{\partial \phi}{\partial u_k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5)$$

3) функция $\phi(u, u^*)$ является суммой однородных функций степеней s_j , т.е., $\phi(u, u^*) = \sum \phi_j(u, u^*)$, для действительных $\lambda > 0$ выполнены равенства

$$\phi_j(\lambda u, \lambda u^*) = \lambda^{s_j} \phi_j(u, u^*). \quad (6)$$

Рассматривается вопрос о взрыве решения в нормах H_1 и L_∞ , т.е., о существовании конечного числа T такого, что

$$\lim_{t \rightarrow T} \sum \|\nabla u_k\|_2 = \infty, \quad (7)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \sum \|u_k\|_\infty = \infty. \quad (8)$$

Результаты настоящей работы обобщает результаты статьи [1]. В статье [1] получены результаты для однородной функции ϕ , т.е., для $s_1 = \dots = s_l$.

Лемма 1. *Справедливы следующие тождества*

$$I_1(t) \equiv \int_{R^n} \sum_{k=1}^m |u_k|^2 dx \equiv \int_{R^n} |u|^2 dx = I_1(0),$$

$$I_2(t) \equiv \int_{R^n} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k a_k |\nabla u_k|^2 - \phi(u, u^*) \right) dx = I_2(0).$$

Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{R^n} \sum_{k=1}^m |x| |u_k|^2 dx, \quad M_k = 2ia_k \int_{R^n} \sum_{j=1}^n x_j \left(u_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} - u_k^* \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx.$$

Лемма 2. *Если $a_k/\alpha_k = A$, то*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = \sum M_k.$$

Леммы 1 и 2 доказываются аналогично, как в статье [1], поскольку однородность функции ϕ не используется.

Лемма 3. *Если $a_k/\alpha_k = A$, то*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t) = 2An(s_l - 2)I_2 + 2(4 - n(s_l - 2)) \int_{R^n} \sum_{k=1}^m a_k^2 |\nabla u_k|^2 dx$$

$$+ 2nA \int_{R^n} \sum_{k=1}^{l-1} (s_l - s_k) \phi_k dx.$$

Доказательство. Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial t} M_k = 8a_k^2 \int_{R^n} |\nabla u_k|^2 dx - 8A \operatorname{Im} \int_{R^n} \sum_{j=1}^n x_j \alpha_k f_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} dx$$

$$- 4nA \operatorname{Im} \int_{R^n} \alpha_k f_k u_k^* dx.$$

Последнее слагаемое в правой части равно

$$\begin{aligned}
 -4nA\text{Im} \int_{R^n} \alpha_k f_k u_k^* dx &= -2nA\text{Im} \int_{R^n} \alpha_k f_k u_k^* dx + 2nA\text{Im} \int_{R^n} \alpha_k f_k^* u_k dx \\
 &= -2nA\text{Im} \int_{R^n} i \frac{\partial \phi}{\partial u_k^*} u_k^* dx - 2nA\text{Im} \int_{R^n} i \frac{\partial \phi}{\partial u_k} u_k dx \\
 &= -2nA\text{Im} \sum_{j=1}^l \int_{R^n} i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial u_k^*} u_k^* + \frac{\partial \phi_j}{\partial u_k} u_k \right) dx.
 \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t) &= \sum \frac{\partial M_k}{\partial t} \\
 &= 8A \int_{R^n} \sum_{k=1}^m a_k \alpha_k |\nabla u_k|^2 dx - 4A \sum_{j=1}^n \int_{R^n} x_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx - 2nA \sum_{j=1}^l \int_{R^n} s_j \phi_j dx \\
 &= 8A \int_{R^n} \sum_{k=1}^m a_k \alpha_k |\nabla u_k|^2 dx + 4An \int_{R^n} \phi dx - 2nA \sum_{j=1}^l \int_{R^n} s_j \phi_j dx \\
 &= 2An(s_l - 2)I_2 + 2(4 - n(s_l - 2)) \int_{R^n} \sum_{k=1}^m a_k^2 |\nabla u_k|^2 dx \\
 &\quad + 2An(s_l - 2) \int_{R^n} \phi dx + 4An \int_{R^n} \phi dx - 2nA \sum_{j=1}^l \int_{R^n} s_j \phi_j dx \\
 &= 2An(s_l - 2)I_2 + 2(4 - n(s_l - 2)) \int_{R^n} \sum_{k=1}^m a_k^2 |\nabla u_k|^2 dx \\
 &\quad + 2nA \int_{R^n} s_l \phi dx - 2nA \sum_{j=1}^l \int_{R^n} s_j \phi_j dx \\
 &= 2An(s_l - 2)I_2 + 2(4 - n(s_l - 2)) \int_{R^n} \sum_{k=1}^m a_k^2 |\nabla u_k|^2 dx \\
 &\quad + 2nA \int_{R^n} \sum_{k=1}^{l-1} (s_l - s_k) \phi_k dx.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть и решение задачи (1), (2), выполнены условия (3)–(6) и

$$s_l \geq 2 + \frac{4}{n}, \quad AI_2(0) < 0, \quad A(s_l - s_j) \int_{R^n} \phi_j dx \leq 0, \quad j = 1, \dots, l-1.$$

Тогда существует конечное положительное число T такое, что выполнены равенства (7), (8).

Доказательство. Из леммы 3 и условий теоремы следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t) \leq 2n(s_l - 2)AI_2(0)$$

или

$$\Phi(t) \leq An(s_l - 1)I_2(0)t^2 + \Phi'(0)t + \Phi(0).$$

Правая часть последнего неравенства представляет квадратичный трехчлен с отрицательным коэффициентом при t^2 , поэтому существует конечное число T такое, что

$$\lim_{t \rightarrow T} \sum \int |x|^2 |u_k|^2 dx = 0.$$

Далее доказательство аналогично, как в статье [1]. Теорема доказана.

Пример. Система

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -i\Delta u_1 - i\frac{p_1}{2}|u_1|^{p_1-2}|u_2|^{q_1}u_1 - i\frac{p_2}{2}|u_1|^{p_2-2}|u_2|^{q_2}u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -i\Delta u_2 - i\frac{q_1}{2}|u_1|^{p_1}|u_2|^{q_1-2}u_2 - i\frac{q_2}{2}|u_1|^{p_2}|u_2|^{q_2-2}u_2 \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1, если $p_1 + q_1 \geq p_2 + q_2 \geq 2 + 4/n$, $I_2(0) < 0$, поскольку

$$(s_2 - s_1) \int_{R^n} |u_1|^{p_1} |u_2|^{q_1} \leq 0.$$

Здесь $s_j = p_j + q_j$, $\phi_j = |u_1|^{p_j} |u_2|^{q_j}$, $a_j = \alpha_j = -1$, $A = 1$, $j = 1, 2$, $l = 2$.

Более того, для системы в данном примере можно доказать более сильное предложение: существует конечное положительное число T такое, что выполнены равенства

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \|\nabla u_k\|_2 &= \infty, \\ \lim_{t \rightarrow T} \|u_k\|_\infty &= \infty, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Для этого вместо леммы 1 надо доказать

$$\int_{R^n} |u_k(t, x)|^2 dx = \int_{R^n} |u_k(0, x)|^2 dx, \quad k = 1, 2,$$

откуда следует

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{R^n} |x|^2 |u_k|^2 dx = 0, \quad k = 1, 2.$$

Литература

- [1] А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Liet. Matem. Rink.*, **35**(2), 181–189 (1995).

Šredingerio lygčių sistema su netiesine nehomogenine dalimi

G. Puriuškis

Nagrinėjama Šredingerio netiesinių lygčių sistema

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = ia_k \Delta u_k + f_k(u, u^*), \quad t > 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad u_k(0, x) = u_{k0}(x),$$

čia f_k yra skirtingo laipsnio homogeninių funkcijų suma. Nustatytos sąlygos, kuriomis sprendinys sprogs.