Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 194–201

Apie Rikačio lygties bendrąjį sprendinį

Kostas Ramutis PETRAUSKAS, Ignas SKUČAS,
Irena PETRAUSKIENĖ, Antanas BŪDA (VDU)
el. paštas: kopetr@org.ktu.lt, ignas_skucas@fc.vdu.lt, antanasbuda@hotmail.com

Rikačio lygties sprendimas svarbus tobulinant matematinius modelius, taikomus automatinio valdymo ir kitose srityse.

Rikačio lygtis susieta, visų pirma, su antros eilės tiesine diferencialine lygtimi su kintamais koeficientais

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \tag{1}$$

taip, kad kai funkcijos $u(x)$, $z(x)$, $y(x)$ apibrėžiamos lygtimis:

$$\begin{aligned} &y'(x) + u(x)y(x) = z(x), \quad z'(x) + (p(x) - u(x))z(x) = f(x), \\ &u'(x) = (u(x))^2 - p(x)u(x) + q(x), \end{aligned} \tag{2}$$

tuomet (1) lygties sprendimas susiveda į Rikačio (2) lygties atžvilgiu $u(x)$ sprendinio radimą.

Rikačio lygties bendras pavidalas

$$y'(x) = p(x)(y(x))^2 + q(x)y(x) + r(x) \tag{3}$$

keitiniais

$$\begin{aligned} &y(x) = h(x) + \frac{u_{kan}(x)}{p(x)}, \quad h(x) = \frac{-q(x)}{2p(x)} - \frac{1}{2(p(x))^2}p'(x), \\ &r_{kan} = r_{kan}(x) = \Big[p(x)\big(h(x)\big)^2 + r(x) - h'(x) + q(x)h(x)\Big]p(x), \end{aligned} \tag{4}$$

suvedamas į *kanoninį Rikačio lygties pavidalą* atžvilgiu $u_{kan} = u_{kan}(x)$

$$u'_{kan} = (u_{kan})^2 + r_{kan}(x). \tag{5}$$

Kai $u_{kan} = -z'/z$, $z = z(x)$, tuomet kanoninį Rikačio lygties (5) pavidalą atitinka antros eilės tiesinė homogeninė diferencialinė lygtis pavidalo

$$z'' + r_{kan}(x)z = 0. \tag{6}$$

Rikačio lygtys išsprendžiamos tik atskirais atvejais. Kai žinome Rikačio lygties (3) bent vieną atskirą sprendinį, tuomet randame bendrąjį sprendinį [1]. Kai žinome Rikačio lygties atskirą kompleksinį sprendinį $y_1(x)$, tada randame ir Rikačio lygčiai ekvivalenčios antros eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygties realų sprendinį; tuomet randame ir Rikačio lygties bendrąjį sprendinį. Kai žinome vieną atskirą sprendinį $y_1 = y_1(x)$ tuomet keitiniu $y(x) = y_1 + 1/z$ gauname tiesinę lygtį atžvilgiu $z = z(x)$

$$z' = -z\big(q(x) + 2p(x)y_1\big) - p(x). \tag{7}$$

Rikačio (3) lygties sprendinio radimui galima pasinaudoti ir lygtį (3) atitinkančios antros eilės tiesinės diferencialinės homogeninės lygties sprendiniu eilutės pavidale. Atskiri išsprendžiami a priori nežinant jokio sprendinio atvejai, specialios Rikačio lygtys, artutiniai sprendimo metodai, ypatingi sprendiniai ir jų radimo metodai aprašyti literatūroje [1, 2]. Rikačio lygtį galime spręsti metodu, kurį dabar pateiksime.

Rikačio lygties bendras sprendinys

Rikačio (3) lygčių atskiri išsprendžiami atvejai, ypatingi sprendiniai ir jų radimo metodai aprašyti literatūroje [1, 2]. Bendru atveju Rikačio (3) lygties bendrojo sprendinio $y(x)$ radimui intervale $x \in [x_0, x_{gal}]$ keitiniais (4) suvedame lygties (3) bendrą pavidalą į kanoninį pavidalą (5) atžvilgiu $u_{kan} = u_{kan}(x)$; esant galimybei tikslinga turėti funkciją r_{kan}, aprėžtą, kai $x \in [x_0, x_{gal}]$. Kai

$$\begin{aligned}
&y_1' = 2y_0y_1 - 1, \quad y_2' = y_2(2y_0 - 2y_1Y),\\
&Y = y_0' + (y_0)^2 + r_{kan}, \quad z = Yy_2,\\
&u_0 = \frac{1}{y_2}\cdot\left(y_1 - \frac{1}{u_{kan} + y_0}\right), \quad u_{kan} = -y_0 + \frac{1}{y_1 - y_2u_0}, \quad r_0 = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

čia $y_0 = y_0(x)$ – nauja laisvai parenkama funkcija, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $Y = Y(x)$, $z = z(x)$, $r_0 = r_0(x)$ – naujos funkcijos, apibrėžiamos funkcijomis y_0 ir r_{kan}; tuomet Rikačio (3) lygties kanoninis pavidalas atžvilgiu u_0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_0(x) = z(x)\Big[\big[u_0(x)\big]^2 + r_0(x)\Big], \quad x \in [x_0; x_{gal}]. \tag{9}$$

Kai funkcija $y_0 \to -u_{kan}$, tuomet funkcija $Y \to 0$. Kai funkcija $Y = Y(x) \equiv 0$, tuomet funkcija $-y_0$ yra Rikačio lygties sprendinys $u_{kan} = -y_0$ ir tuo atveju $u_0 = \frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_2\cdot 0}$ neapibrėžtas, bet tada keitiniu $u_{kan} = v - y_0$ Rikačio lygtis suvedama į Bernulio lygtį atžvilgiu $v = v(x)$. Kai $u_{kan} \neq -y_0$, tada u_0 apibrėžtas.

Tolesni keitiniai priklauso nuo gautų funkcijų z, r_0. Optimaliai parenkant laisvą funkciją y_0 ir laisvąsias konstantas c_3, c_4 (gaunamas integruojant y_1 ir y_2 apibrėžiančias lygtis) pagal funkciją r_{kan}, kai $x \in [x_0, x_{gal}]$, galime gauti optimalias funkcijas $r_0 = r_0(x)$ ir $z = z(x)$; jos apsprendžia visą tolesnę sprendimo proceso eigą. Gali būti tikslinga pakartotinai k kartų nuosekliai $i = 1, 2, \ldots, k$ gaunamos pavidalo (9) lygties atžvilgiu taikyti atitinkamus pavidalo (8) keitinius. Tada optimaliai parenkant laisvas funkcijas y_0,

$y_{0,i}$ ir konstantas c_3, c_4, $c_{3,i}$, $c_{4,i}$ gauname (9) lygtyje atžvilgiu $u_{0,k} = u_{0,k}(x)$ optimalesnes funkcijas z_k, $r_{0,k}$. Jei parinkti ir (8) lygčių, t.y., $u_{kan} = f(x, u_0, y_0, y_1, y_2)$, $F(x, y_0, y_1, y_1') = 0$, $F(x, y_0, y_0', y_1, y_2, y_2') = 0$ optimalias išraiškas pagal funkciją r_{kan}, tuomet optimizuotume funkcijas r_0 ir z pilnai.

Atsižvelgiant į r_{kan}, kai $x \in [x_0, x_{gal}]$, gali būti ir netikslinga naudoti (8), (9) keitinius; tada atitinkamose lygtyse: $z = 1$, $u_0 = u_{kan}$, $r_0 = r_{kan}$, $u_{kan} = a_1 \cdot u_1 + b_1$. Šį atskirą atvejį toliau vadinsime: Rikačio lygties sprendimas, 2 atvejis. 2 atvejo ypatumai: tai dalinis atvejis, todėl paprastesni skaičiavimai, galimybės siauresnės; išskirtina tai, kad Rikačio (5) lygtį atitinkančios antros eilės tiesinės homogeninės diferencialinės (6) lygties bendrasis sprendinys gaunamas iš Rikačio (5) lygties bendrojo sprendinio atskirų elementų, nenaudojant papildomo integravimo. K.R. Petrausko, I. Skučo, A.V. Būdos, I. Petrauskienės teikti 43-oje LMD konferencijoje atitinkami pranešimai: „Rikačio lygties sprendimas 2“ ir „Antros eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygties bendras sprendinys“; dėl vietos stokos juose gauti rezultatai nepateikiami.

Bendru atveju tolesni keitiniai pagal formules:

$$\begin{aligned}
&u_0 = a_1 \cdot u_1 + b_1, \quad b_1 = b_1(x) = c_{1,1} + \int_{x_0}^{x} f_1(t) r_0(t) z(t)\,\mathrm{d}t,\\
&a_1 = a_1(x) = c_{2,1} \exp\left[\int_{x_0}^{x} 2b_1(t) z(t)\,\mathrm{d}t\right],\\
&r_1 = r_1(x) = \frac{1}{(a_1)^2} \cdot \left[(b_1)^2 + (1 - f_1) r_0 - \frac{1}{z} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c_{1,1}(x)\right],\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_1(x) = z(x) a_1(x) \left[[u_1(x)]^2 + r_1(x)\right],
\end{aligned} \tag{10}$$

kai $n = 2, 3, 4, \ldots$, tolesni skaičiavimai atliekami nuosekliai pagal formules:

$$\begin{aligned}
&u_{n-1} = a_n \cdot u_n + b_n, \quad b_n = b_n(x) = \frac{c_{1,n}}{k_{n-1}} + \int_{x_0}^{x} f_n(t) r_{n-1}(t) z(t) m_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,\\
&m_n = m_n(x) = \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad k_n = \prod_{i=1}^{n} c_{2,i},\\
&a_n = a_n(x) = c_{2,n} \exp\left[\int_{x_0}^{x} 2S_n(t) z(t)\,\mathrm{d}t\right],\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x) = z(x) m_n(x) \left[[u_n(x)]^2 + r_n(x)\right],\\
&r_n = r_n(x) = \frac{1}{(a_n)^2} \cdot \left[(b_n)^2 + (1 - f_n) r_{n-1} - \frac{1}{z k_{n-1} m_{n-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c_{1,n}(x)\right],\\
&S_n = S_n(x) = b_n \cdot m_{n-1},
\end{aligned} \tag{11}$$

čia $c_{1,n} = c_{1,n}(x)$, $f_n = f_n(x)$ –laisvai pasirenkamos funkcijos, $c_{2,n} = \text{const} \neq 0$.

Gali būti tikslinga: sandaugų $f_n \cdot r_{n-1}$ išraiškose naudoti centruotas funkcijas r_{n-1} ir kitus dalinius atvejus, optimalesnė tarpinio n-tojo ryšio $u_{n-1} = a_n \cdot u_n + b_n$ išraiška. Laisvąsias funkcijas y_0, f_n, $c_{1,n}$ ir konstantas $c_{2,n}$, c_3, c_4 reikia parinkti pagal $r_{kan}(x)$, $x \in [x_0, x_{gal}]$ tokias, kad ribos

$$\text{a)} \ \lim_{s\to\infty} r_s = c_r(x), \quad \text{b)} \ \lim_{s\to\infty} S_s = 0,$$
$$\text{c)} \ \lim_{s\to\infty} \left| b_{s+1} \cdot \frac{a_s}{b_s} \right| = \lim_{s\to\infty} \left| \frac{S_{s+1}}{S_s} \right| < 1, \tag{12}$$

egzistuotų, tuomet procesas konverguoja, ir gaunama funkcija $c_r = c_r(x)$ (12a) tokia (pavyzdžiui $c_r = c_r(x) = \text{const}$), kad lygties

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_s = \lim_{s\to\infty} z \cdot m_s \left[(u_s)^2 + r_s \right] = z \cdot m_s \left[(u_s)^2 + c_r \right]$$

sprendinys $u_s = u_s(x)$ būtų žinomas. Kai $|z| < \infty$, tada pagal (12b) $\lim\limits_{s\to\infty} a_s = c_{2,s}$. Funkcijos S_n, ribos (12 b,c) nuo $c_{2,n}$ nepriklauso.

Kai vidurkiai $\mathrm{M}(S_n \cdot z) = 0$, tuomet $a_n(x_0) = a_n(x_{gal}) = c_{2,n}$ ir turime *sprendimo proceso modifikaciją*.

Radus sprendinį $u_s = u_s(x)$, grįžtame atgal prie funkcijos $u_0 = u_0(x)$ pagal naudotus ryšius:

$$\begin{aligned}
u_0 &= a_1 \cdot u_1 + b_1, \quad u_{n-1} = a_n \cdot u_n + b_n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \\
u_0 &= a_1 \cdot (a_2 \cdot u_2 + b_2) + b_1 = a_1 \left[a_2 \cdot (a_3 \cdot u_3 + b_3) + b_2 \right] + b_1 \\
&= a_1 \left[a_2 \left[a_3 \cdot (a_4 \cdot u_4 + b_4) + b_3 \right] + b_2 \right] + b_1 = \ldots, \\
w &= w(x) = \lim_{s\to\infty} \left(b_1 + \sum_{j=2}^{s} S_j \right) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2z(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left[\frac{m_s(x)}{k_s} \right], \\
u_0(x) &= \lim_{s\to\infty} (w + u_s \cdot m_s).
\end{aligned} \tag{13}$$

Kai $\lim_{s\to\infty} z \cdot m_s \cdot r_s = 0$ arba $\lim_{s\to\infty} r_s = 0$, tuomet vienas sprendinys $u_s = 0$ ir $u_0(x) = w(x)$. Šiuo atveju keitiniu $u_0 = w + 1/h$ gauname tiesinę lygtį atžvilgiu $h = h(x)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h(x) + 2w(x) \cdot h(x) = -1, \\
&h(x) = \frac{-k_s}{m_s(x)} \left[C + \int_{x_0}^{x} z(t) \frac{m_s(t)}{k_s} \mathrm{d}t \right], \\
&u_0(x) = w + \frac{1}{h}, \ u_0(x) = \lim_{s\to\infty} \left[w(x) - \frac{1}{z(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left[C + \int_{x_0}^{x} z(t) \frac{m_s(t)}{k_s} \mathrm{d}t \right] \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Kai $\lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_s} u_s = (u_s)^2 + c_r$, $x_s = \int_{x_0}^{x} z(t) \cdot m_s(t) \mathrm{d}t$, tuomet sprendinys $u_0(x) = \lim_{s\to\infty} (w + u_s \cdot m_s)$. Kai $c_r = 0$, tuomet $u_s = \lim_{s\to\infty} \frac{-1}{Ck_s + x_s}$,

$\lim_{s\to\infty} u_s\cdot m_s = \lim_{s\to\infty} \frac{-m_s}{Ck_s+x_s}$ ir sprendinys $u_0(x)$ randamas pagal (14) lygtį; kai $k_s \neq 0, k_s \neq \infty, \infty > |c_r| \neq 0$:

$$\text{a) } r_s = c_r = \text{const} > 0, \quad u_s = \sqrt{c_r}\cdot \operatorname{tg}\left(C + x_s\sqrt{c_r}\right),$$
$$\text{b) } r_s = c_r = \text{const} < 0, \quad u_s = \sqrt{c_r}\cdot \frac{(1 + Ce^{2x_s\sqrt{c_r}})}{(1 - Ce^{2x_s\sqrt{c_r}})}. \tag{15}$$

Ekvivalentiškai ir kitais $c_r = c_r(x)$ atvejais. Suradus $u_0 = u_0(x)$, randame (8) $u_{kan}(x)$ ir tuomet (4) $y(x)$.

Galime aproksimuoti bendrąjį (dalinį) sprendinį $y(x)$ fiksuojant maksimalią reikšmę $\max(n) = s$, be to galime gauti aproksimavimo paklaidos funkcionalo, atitinkančio Rikačio lygtį, analizinę išraišką.

Dalinis atvejis, kai

$$f_n = 1, \quad c_{1,n} = \text{const}, \quad r_n = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \left(\frac{S_n}{m_n}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{16}$$

Sprendimo proceso modifikacija daliniu atveju: vidurkis $\mathrm{M}(S_n\cdot z) = 0$ ir kai $n > 1$ (ekvivalentiškai, kai $n = 1$):

$$c_{1,n} = \frac{-k_{n-1}}{\mathrm{M}[m_{n-1}(x)]}\cdot \mathrm{M}\left[m_{n-1}(x) \int_{x_0}^{x} r_{n-1}(t)m_{n-1}(t)z(t)\mathrm{d}t\right], \tag{17}$$

kai $z \geqslant 0$ gaunama: $c_{1,n} \leqslant 0$ ir atitinkamai $|a_n| \leqslant |c_{2,n}|$.

Daliniu atveju funkcijų r_n, $n \geqslant 2$, $x \in [x_0; \infty)$ ekstremumai kai

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}r_n &= 2\frac{b_n}{a_n}\left[\frac{1}{(a_n)^2}\left[a_n\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b_n\right) - b_n\cdot(2b_n m_{n-1} z a_n)\right]\right] \\ &= 2\frac{b_n m_{n-1} z}{(a_n)^2}\left[r_{n-1} - 2(b_n)^2\right] = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Jei y_0, $c_{1,n}$, $c_{2,n}$, c_3, c_4 parinkti tokie, kad $r_n(x_0) = \left(\frac{c_{1,n}}{k_n}\right)^2 < \max(r_n)$, $r_n(x_0) < \max(r_{n-1})$, $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{1,n}}{k_n} = 0$ ir kai turime r_n ekstremumą-max $2(a_n)^2 > 1$, $\frac{b_n\cdot m_{n-1}\cdot z}{(a_n)^2} \neq 0$, tuomet pagal (18) lygtį $r_{n-1} - 2(b_n)^2 = 0$, $(b_n)^2 = r_n(a_n)^2$, $r_n = \frac{r_{n-1}}{2(a_n)^2}$ ir $\max(r_n) < \max(r_{n-1})$, $\lim_{s\to\infty} r_s = 0$ (12a). Tuo pačiu metu y_0, $c_{1,n}$, c_3, c_4 atitinkančios ribos (12b) ir (12c) egzistuotų. Pagal (11) lygtis gauname

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(a_{n+1}) = 2b_{n+1}\cdot m_n\cdot z, \quad m_n = \frac{1}{2zb_{n+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(a_{n+1}),$$
$$b_{n+1} = \frac{c_{1,n+1}}{k_n} + \int_{x_0}^{x} r_n\cdot m_n\cdot z\mathrm{d}t = \frac{c_{1,n+1}}{k_n} + \int_{x_0}^{x} \frac{r_n(t)}{2b_{n+1}(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[a_{n+1}(t)\right]\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Tada teisingos ir šios ekvivalenčios lygtys

$$
\begin{aligned}
&2b_{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b_{n+1}=r_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(a_{n+1}),\\
&(b_{n+1})^2=\left(\frac{c_{1,n+1}}{k_n}\right)^2+\int\limits_{x_0}^{x}r_n(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[a_{n+1}(t)\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Jei y_0, $c_{1,n}$, $c_{2,n}$, c_3, c_4 parinkti tokie, kad egzistuotų ribos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}c_{1,n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=c_{2,n},\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{c_{1,n}}{k_{n-1}}=0,\quad \left(\lim_{n\to\infty}r_n=0,\ (12\text{a})\right),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

tuomet kai $n\to\infty$, $\left(\frac{c_{1,n+1}}{k_n}\right)^2=0$ pagal (20) lygtį randame ribą (12c):

$$
\begin{aligned}
&\frac{(b_{n+1})^2}{r_n}=\left(b_{n+1}\cdot\frac{a_n}{b_n}\right)^2=\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)^2=\frac{1}{r_n}\int\limits_{x_0}^{x}r_n(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[a_{n+1}(t)\right]\mathrm{d}t,\\
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)^2=\lim_{r_n\to0}\left[\frac{1}{r_n}\int\limits_{x_0}^{x}r_n(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[a_{n+1}(t)\right]\mathrm{d}t\right]=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Kad riba (12c), tuo pat metu ir riba (12a), jei ir $\lim_{s\to\infty}|k_s|<\infty$, $\lim_{s\to\infty}|m_s|<\infty$, tai ir riba (12b) egzistuotų. Pakankama sąlyga yra, kad ribos (21) egzistuotų.

Kai $x\in[x_0;x_{gal}]$, $r_n=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2=\left(\frac{S_n}{m_n}\right)^2$, $\lim_{s\to\infty}c_{1,s}=0$ ir $\lim_{s\to\infty}\frac{c_{1,s}}{k_s}=0$, ribos (12 a, b, c) bus teisingos:

1. Kai $\lim_{s\to\infty}r_s=0$ (12a), tuomet prie pakankamų sąlygų $\lim_{s\to\infty}|k_s|<\infty$, $\lim_{s\to\infty}|m_s|<\infty$, $|z|<\infty$, teisingos ribos $\lim_{s\to\infty}(S_s)^2=\lim_{s\to\infty}r_s\cdot(m_s)^2=0$ (12b), $\lim_{s\to\infty}S_s\cdot z=0$, $\lim_{s\to\infty}a_s=c_{2,s}$, $\lim_{s\to\infty}b_s=0$ ir riba (12c) teisinga (22).

2. Kai $\lim_{s\to\infty}S_s=0$ (12b), tuomet prie pakankamų sąlygų $\lim_{s\to\infty}|k_s|>0$, $\lim_{s\to\infty}|m_s|>0$, $|z|<\infty$ teisingos ribos $\lim_{s\to\infty}r_s=0$ (12a), $\lim_{s\to\infty}S_s\cdot z=0$, $\lim_{s\to\infty}a_s=c_{2,s}$, $\lim_{s\to\infty}b_s=0$ ir riba (12c) (22).

Yra ir daugiau atvejų, kai ribos (12) teisingos, kurie dėl vietos stokos (6 psl. limitas) nepateikiami. Intervalo reikšmė $\max(x_{gal})$ apsprendžiama (daliniu) intervalu, kuriame ribos (12) teisingos, optimaliai parenkant y_0, f_n, $c_{1,n}$, $c_{2,n}$, c_3, c_4 pagal $r_{kan}(x)$, kai $x\in[x_0;x_{gal}]$.

Funkcija r_0 priklauso nuo y_0 ir laisvųjų konstantų $c_3, c_4\neq0$ parinkimo pagal funkciją r_{kan}, $x\in[x_0;x_{gal}]$:

$$
\begin{aligned}
&y_1=y_1(x)=y_{10}(c_3-y_{11}),\\
&y_{10}=y_{10}(x)=\exp\left[\int\limits_{x_0}^{x}2y_0(t)\mathrm{d}t\right],\quad y_{11}=y_{11}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{1}{y_{10}(t)}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

$$y_2 = y_2(x) = c_4 \cdot y_{10} \cdot y_{22}, \quad y_{22} = y_{22}(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} -2y_1(t) \cdot Y(t)\mathrm{d}t\right],$$

$$r_0 = r_0(x) = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 = \left[\frac{y_{10} \cdot (c_3 - y_{11})}{c_4 \cdot y_{10} \cdot y_{22}}\right]^2 = \left[\frac{(c_3 - y_{11})}{c_4 \cdot y_{22}}\right]^2. \tag{23}$$

Kad gautume funkciją $r_0 < \infty$ intervale $x \in [x_0; x_{gal}]$, kai $-\infty < r_{kan} < \infty$, pakankama sąlyga yra: $-\infty < y_0 < \infty$ ir $-\infty < y_0' + r_{kan} < \infty$; tuomet ir $|z| < \infty$. Funkcijos $z = y_2 \cdot Y$ ženklas signum(z) =signum($c_4 \cdot Y$), pvz., $z \geqslant 0$, kai $Y \geqslant 0$ (pakanka $y_0' + r_{kan} \geqslant 0$) ir $c_4 > 0$. Kai $y_0 < \infty$, tai $0 \leqslant y_{11} < \infty$, kai ir $c_3 \leqslant 0$: $y_1 \leqslant 0$ ir jei $Y \geqslant 0$, tuomet $y_1 \cdot Y \leqslant 0 \neq \infty$, $y_{22} \geqslant 1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y_{22} \geqslant 0$ ir $r_0 < \infty$. Patogu išreikšti funkciją y_0 per funkciją $y_3 = y_3(x)$

$$y_0 = y_3 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Big[|r_{kan}(t)| - r_{kan}(t)\Big]\mathrm{d}t, \quad y_0 \geqslant y_3. \tag{24}$$

Jei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \geqslant 0$ $(y \geqslant 0)$ ir $y_3 \geqslant 0$ $(y_0 \geqslant 0,\ y_0 \geqslant y_3)$, tuomet $y_0 \geqslant 0$, $y_{10} \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y_{11} = \frac{1}{y_{10}} \leqslant 1$, $Y \geqslant 0$; ir y_3, c_3, c_4 apsprendžia $\max(r_0)$ reikšmę, bei šį maksimumą atitinkančio taško x reikšmę; galima gauti funkciją $r_0 < \infty$, pakanka $c_3 \leqslant 0$, $c_4 > 0$: $z \geqslant 0$, $r_0 < \infty$. Optimalus funkcijos y_3 parinkimas pagal funkciją r_{kan}, $x \in [x_0; x_{gal}]$.

Bendru atveju priklausomai nuo $r_{kan}(x)$ pavidalo, kai $x \in [x_0; x_{gal}]$, gali būti tikslinga (reikalinga):

1) parinkti optimalią funkciją y_0, konstantas c_3, c_4 $(y_{0,i}, c_{3,i}, c_{4,i}, i = 1, 2, \ldots, k)$ pagal $r_{kan}(x)$, kai $x \in [x_0; x_{gal}]$ arba taikyti sprendimo atskirą atvejį 2; ieškoti sprendinio neatliekant iteracijų pagal formules (11);
2) taikyti *sprendimo proceso modifikaciją*, vidurkis $\mathrm{M}(S_n) = 0$;
3) taikyti pradiniame etape bendrą atvejį su optimaliomis funkcijomis $c_{1,n} = c_{1,n}(x)$, $f_n = f_n(x)$, tolesniame – dalinį atvejį;
4) taikant *dalinį atvejį*, kai $z \geqslant 0$ ir $\mathrm{M}(S_n) = 0$ didėjant n gaunama: $c_{1,n} \leqslant 0$, $|a_n| \leqslant |c_{2,n}|$, gan tipinis r_n ir didėjančių b_n funkcijų pobūdis; tikslinga tarpiniuose etapuose taikyti bendrą atveją su optimaliomis, artimomis pagal pobūdį funkcijomis $c_{1,n}(x)$, $f_n(x)$;
5) sumažinti intervalo $[x_0; x_{gal}]$ reikšmę x_0; skaidyti kintamojo x intervalą $[x_0; x_{gal}]$ į dalinius (persidengiančius) intervalus; kai $x < x_0$ ir $x > x_{gal}$ pakeisti originalo funkciją $r_{kan}(x) = r_{laisva}(x)$, atitinkamai daliniuose intervaluose.

Aproksimacijos, skaitinio sprendimo galimybes ir metodo esmę iliustruojantis pavyzdys

Sprendžiama lygtis pavidalo $u' = u^2 + r(x)$. *Sprendimo proceso modifikacija daliniam atvejui*, kai $y_0(x) = \int_{x_0}^{x} -r(t)\mathrm{d}t$, $f_n = 1$, $c_{2,n} = 1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$,

$c_{1,n}$reikšmės iš lygties: vidurkis $\mathrm{M}(S_n \cdot z) = 0$; $x_0 = 0$, $x_{gal} = 3,5$, $r(x) = \left(\frac{1+2x}{10}\right)^2 \cdot \cos(10\pi x)^2 + (1+2x)\pi\cos(10\pi x) - \frac{1}{25}x^2 - \frac{1}{100} + \frac{3}{5}\sin(10\pi x) - \frac{1}{25}x$, $f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $u_{teor} = u_{teor}(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{5}f(x)\sin(10\pi x)$ – žinomas palyginimui vienas teorinis sprendinys.

Lygties $u' = u^2 + r(x)$ aproksimuotas atskiras sprendinys u_{aprox}, gautas iš aproksimuoto ($\max(n) = s = 6$) lygties bendrojo sprendinio; laisvoji konstanta C apskaičiuota pagal žinomo palyginimui teorinio u_{teor} sprendinio pradines sąlygas.

Palyginimui sprendinys $u_{Rkadapt}$ su MathCAD: $Rkadapt(Y0, x_0, x_{gal}, N, D)$, $N = 8 \cdot 10^3$.

Pavyzdžio atveju gauti rezultatai: pateikto metodo aproksimuoto sprendinio u_{aprox} ir gauto su MathCAD programa sprendinio $u_{Rkadapt}$ paklaidos, lyginant su teoriniu sprendiniu u_{teor}, vienodos eilės.

Didėjant n, spartus konvergavimą apibrėžiančių funkcijų kitimas: kai $n = s$, funkcijos $b_n \to 0$, $a_n \to 1$, $S_n \to 0$ ir $r_n \to 0$. Identiškai *daliniu atveju be sprendimo proceso modifikacijos*, kai $c_{1,n} = 0$ ir $x_{gal} < 2,8$. Sprendžiant pavyzdį pagal metodiką (atvejis 2) gauti identiški rezultatai, kai $\max(n) = s = 4$ ir prie mažesnių x_{gal} reikšmių.

Šie pavyzdžiai iliustruoja metodą ir patvirtina jo teisingumą.

Išvada

Gauta Rikačio lygties bendrojo sprendinio analitinė išraiška; pasinaudojant šia išraiška gauta antros eilės tiesinės diferencialinės lygties bendrojo sprendinio analitinė išraiška.

Literatūra

[1] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1968).
[2] P. Golokvosčius, *Diferencialinės lygtys*, TEV, Vilnius (2000).

Solution of Riccati equation

K.R. Petrauskas, I. Skučas, I. Petrauskienė, A.V. Būda

An analytical expression of general solution of Riccati equation is received. An analytical expression of general solution of second-order differential linear equation is received by solving Riccati equation.