Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 155–158

Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом логарифмического порядка для полуплоскости

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Рассматривется краевая задача Римана:

найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней D^+ и нижней D^- полуплоскости, предельные значения которых $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют на вещественной оси краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

где относительно коэффициента $G(t)$ и свободного члена $g(t)$ сделаны следующие предположения:

$$\ln G(t) \in \mathcal{D}_p \tag{2}$$

для любово конечного отрезка вещественной оси;

$$\ln|G(t)| = \begin{cases} \psi_1(t)\ln^\rho|t|, & \text{если } t \leqslant -R, \\ \psi_2(t)\ln^\sigma|t|, & \text{если } t \geqslant R, \end{cases} \tag{3}$$

для любово $R > e^{2\pi}$, где $\min(\rho,\sigma) > 1$,

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) \in \mathcal{D}_\gamma(-\infty \leqslant t \leqslant -R),\ \gamma > \rho+2, \quad \psi_1(-\infty) = \varkappa_1 \leqslant 0, \\ &\psi_2(t) \in \mathcal{D}_\delta(R \leqslant t \leqslant +\infty),\ \delta > \sigma+2, \quad \psi_2(+\infty) = \varkappa_2 \geqslant 0,\ \varkappa_1^2+\varkappa_2^2 > 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\arg G(t) = \begin{cases} \varphi_1(t)\ln^\alpha|t|, & \text{если } t \leqslant -R, \\ \varphi_2(t)\ln^\beta|t|, & \text{если } t \geqslant R, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\min(\alpha,\beta) > 1,\ \varphi_1(t) \in \mathcal{D}_\mu(-\infty \leqslant t \leqslant -R),\ \mu > \alpha+2,\ \varphi_1(-\infty) = \lambda_1 \leqslant 0, \\ &\varphi_2(t) \in \mathcal{D}_\nu(R \leqslant t \leqslant +\infty),\ \nu > \beta+2,\ \varphi_2(+\infty) = \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1^2+\lambda_2^2 > 0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$g(t) \in \mathcal{D}_q(-\infty \leqslant t \leqslant +\infty), \quad q > \max(\rho,\sigma,\alpha,\beta), \quad g(\pm\infty) = 0. \tag{7}$$

Решения задачи (1)–(7) будем искать в классе $\mathcal{B}$ функций, аналитических и ограниченных в $D^\pm$, непрерывно продолжимых на вещественную ось слева и справа.

Из (3) и (4) следует, что коэффициент $G(t)$ задачи Римана не ограничен, а из (5) и (6) следует, что задача (1)–(7) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка.

В работах автора [1]–[5] коэффициент $|G(t)|$ был ограничен на вещественной оси, т.е.,

$$\ln|G(t)| \in \mathcal{D}_p(-\infty \leqslant t \leqslant +\infty).$$

В предположениях 2)–6) для канонической функции

$$\exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(x))}{x(x-z)}\mathrm{d}x\right\} = \begin{cases} X^+(z), & z\in D^+,\\ X^-(z), & z\in D^-,\end{cases} \tag{8}$$

справедливо асимптотическое равенство ($z\to\infty$, $z\notin[-\infty,+\infty]$):

$$\begin{aligned} X^{\pm}(z) = \exp&\left\{\varkappa_1\frac{(2\pi i)^{\rho}}{\rho+1}\mathbb{B}_{\rho+1}\left(\frac{\ln z+\pi i}{2\pi i}\right) + i\lambda_1\frac{(2\pi i)^{\alpha}}{\alpha+1}\mathbb{B}_{\alpha+1}\left(\frac{\ln z+\pi i}{2\pi i}\right)\right\}\\ &\times\left\{-\varkappa_2\frac{(2\pi i)^{\sigma}}{\sigma+1}\mathbb{B}_{\sigma+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) - i\lambda_2\frac{(2\pi i)^{\beta}}{\beta+1}\mathbb{B}_{\beta+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) + S(z)\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbb{B}_{\rho+1}(w)$, $\mathbb{B}_{\alpha+1}(w)$, $\mathbb{B}_{\sigma+1}(w_1)$, $\mathbb{B}_{\beta+1}(w_1)$ – многочлены Бернулли, а ветви $(\ln z+\pi i)^{\rho}$, $(\ln z+\pi i)^{\alpha}$ и $\ln z+\pi i$ непрерывны в области $(R<|z|<\infty)\cap(-\pi<\arg z<\pi)$, $(\ln x+\pi i)^{\rho}>0$, $(\ln x+\pi i)^{\alpha}>0$, и $\ln x+\pi i>0$ на нижнем берегу разреза по лучу $\arg z=\pi$ при $x<-R$, а ветви $\ln^{\sigma} z$, $\ln^{\beta} z$ и $\ln z$ непрерывны в области $(R<|z|<\infty)\cap(0<\arg z<2\pi)$, $\ln^{\sigma} x>0$, $\ln^{\beta} x>0$, и $\ln x>0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z=0$ при $x>R$, $S(z)$ – аналитическая и ограниченная функция в окрестности $z=\infty$.

Из линейности краевого условия (1) следует, что достаточно найти одно частное решение $\Phi_0^{\pm}(z)\in\mathcal{B}$ неоднородной задачи (1)–(7), после чего общее решение этой задачи будет

$$\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z) + \Psi^{\pm}(z), \quad z\in \boldsymbol{D}^{\pm}, \tag{10}$$

где $\Psi^{\pm}(z)$ – общее решение в классе $\mathcal{B}$ соответствующей однородной задачи

$$\Psi^+(t) = G(t)\Psi^-(t). \tag{11}$$

Известно [2], что общее решение однородной задачи (11) в классе $\mathcal{B}$ имеет вид

$$\Psi^{\pm}(z) = F(z)X^{\pm}(z), \tag{12}$$

где $F(z)$ – целая функция нулевого порядка роста, для которой на вещественной оси справедлива ассимптотическая оценка ($|t| \to \infty$)

$$\left|F(t)X^{\pm}(t)\right| = O(1). \tag{13}$$

Для построения частного решения $\Phi_0^{\pm}(z)$ вместо задачи (1)–(7) рассматриваются две вспомогательные неоднородные задачи:

$$\Phi_1^{+}(t) = G(t)\Phi_1^{-}(t) + g_1(t), \quad g_1(t) = \begin{cases} 0, & t \geqslant 0, \\ g(t), & t < 0, \end{cases} \tag{14}$$

и

$$\Phi_2^{+}(t) = G(t)\Phi_2^{-}(t) + g_2(t), \quad g_2(t) = \begin{cases} g(t), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{15}$$

Пропуская промежуточные вычисления, связанные с построениям частных решений вспомогательных задач (14) и (15) [2], сформулируем окончательный результат исследования.

Теорема. *Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом и с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости* (1)–(7) *имеет в классе B бесконечное множество решений, общая формула которых имеет вид*

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)\cdot\prod_{k=1}^{4}F_k(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{\prod_{k=1}^{4}F_k(x)X^{+}(x)(x-z)}$$
$$+\frac{X^{\pm}(z)\cdot\prod_{k=1}^{4}G_k(z)}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{\prod_{k=1}^{4}G_k(x)X^{+}(x)(x-z)} + X^{\pm}(z)F(z),$$

где $X^{\pm}(z)$ – каноническая функция (8), *для которой справедливо асимптотическое равенство* (9), *а $F_k(z)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ – целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на положительном луче вещественной оси, определенные равенствами*[1]*:*

$$F_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_n^{(1)}}\right), \quad r_n^{(1)} = \exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2}\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$
$$F_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_n^{(2)}}\right), \quad \mathrm{Re}\left(\ln r_n^{(2)} - \pi i\right)^{\alpha} = (2n-1)\pi(-\lambda_1)^{-1},$$

[1] Если $\lambda_1 = \varkappa_1 = 0$, то $F_2(z) \equiv G_1(z) \equiv F_4(z) \equiv G_3(z) \equiv 1$; если $\lambda_2 = \varkappa_2 = 0$, то $F_1(z) \equiv G_2(z) \equiv F_3(z) \equiv G_4(z) \equiv 1$.

$$F_3(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_n^{(3)}}\right),\quad r_n^{(3)}=\exp\left\{\frac{(2n-1)\pi}{\varkappa_2}\right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$F_4(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_n^{(4)}}\right),\quad \operatorname{Re}\left(\ln r_n^{(4)}-\pi i\right)^{\rho}=(2n-1)\pi(-\varkappa_1)^{-1},$$

$$n=1,2,3,\ldots;$$

$G_k(z)$ – целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на отрицательном луче вещественной оси, определенные равенствами:

$$G_1(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_m^{(1)}}\right),\quad r_m^{(1)}=\exp\left\{\frac{(2m-1)\pi}{-\lambda_1}\right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$G_2(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_m^{(2)}}\right),\quad \operatorname{Re}\left(\ln r_m^{(2)}-\pi i\right)^{\beta}=(2m-1)\pi(\lambda_2)^{-1},$$

$$G_3(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_m^{(3)}}\right),\quad r_m^{(3)}=\exp\left\{\frac{(2m-1)\pi}{-\varkappa_1}\right\}^{\frac{1}{\rho}},$$

$$G_4(z)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_m^{(4)}}\right),\quad \operatorname{Re}\left(\ln r_m^{(4)}-\pi i\right)^{\sigma}=(2m-1)\pi(\varkappa_2)^{-1},$$

$$m=1,2,3,\ldots;$$

а $F(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, для которой на вещественной оси справедливо асимптотическая оценка (13).

Литература

[1] П. Алекна, Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **13**(3), 5–13 (1973).

[2] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\gamma > 1$ для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **15**(1), 5–22 (1975).

[3] П. Алекна, Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной краевой задачи Римана с минус-бесконечным индексом логарифмического порядка $\min(\alpha,\beta)\geqslant 1$ для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **18**(3), 5–14 (1978).

[4] P. Alekna, Inhomogene Riemannsche Randwertaufgabe mit positive unendlichen Index der Logaritmischen Ordnung $min(\alpha,\beta) > 1$ für einen Winkelraum, *Complex Variables*, **16**, 273–288 (1991).

[5] П. Алекна, Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для сложного контура, *Liet. Matem. Rink.*, **35**(2), 133–140, (1995).

Nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su logaritminės eilės neaprėžtu koeficientu pusplokštumei

P. Alekna

Išnagrinėtas nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su neaprėžtu koeficientu. Gauta bendrojo sprendinio išraiška aprėžtų analizinių funkcijų klasėje $\mathcal{B}$.