Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 113–118

Kai kurie judesių grupių keturmatėje tiesinių elementų edvėje L_4 ypatumai

Algimantas Pranas URBONAS, Virginijus MARCINKEVIČIUS (VPU)
el. paštas: urbonas@vpu.lt

Darbe [2] buvo surasta pirmoji lakuna tiesinių elementų tiesinės sieties erdvių L_n judesių grupių eilėse, kai $n > 4$. Liko neištirtos mažo matavimo erdvės, t.y., erdvės L_4, L_3, L_2, L_1.

Šiame straipsnyje ieškoma pirmoji lakuna judesių grupių eilėse erdvėje L_4.

Tegul L_4 – keturmatė tiesinių elementų erdvė (x^i, l^k) su tiesine sietimi $\Gamma^i_j(x, l)$ $(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ [1].

Objektas Γ^i_j yra homogeninis pirmos eilės kintamųjų l^i atžvilgiu ir, pakeitus bazės koordinates

$$\bar{x}^i = f^i(x^k) \quad \left(x^k = g^k(\bar{x}^i)\right), \tag{1}$$

keičiasi taip

$$\bar{\Gamma}^i_j(\bar{x}, \bar{l}) = f^i_k g^l_j \Gamma^k_l(x, l) - f^i_{ks} g^k_j l^s. \tag{2}$$

Čia ir toliau mes žymėsime

$$f^i_k = \frac{\partial f^i}{\partial x^k}, \quad f^i_{kl} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l}, \ldots,$$
$$g^i_k = \frac{\partial g^i}{\partial \bar{x}^k}, \quad g^i_{kl} = \frac{\partial^2 g^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}, \ldots.$$

Kaip buvo įrodyta [1], objektas Γ^i_j erdvėje L_4 indukuoja afininę sietį

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_j}{\partial l^k}. \tag{3}$$

Toliau diferencijavimą pagal l^k mes žymėsime tašku. Pavyzdžiui, $\frac{\partial A}{\partial l^k} = A_{\cdot k}$. Priminsime, kad erdvės L_4 tiesinės sieties kreivumo tenzorius yra [1]

$$R^i_{jk} = 2\left(\partial_{[j}\Gamma^i_{k]} + \Gamma^i_{[j|p|}\Gamma^p_{k]}\right). \tag{4}$$

Bazės transformacija $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\delta t$ yra vadinama judesiu erdvėje L_4 su tiesine sietimi, jei $v^i(x)$ tenkina diferencialinių lygčių sistemą [1]:

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\, \Gamma^i_j = 0, \tag{5}$$

kur $\underset{v}{\mathcal{L}}$ – Lie išvestinė pagal $v^i(x)$.

Pažymėję $v^i_j = \nabla_j v^i$ (∇_j žymi kovariantinę išvestinę pagal x^j) ir laikydami v^i bei v^i_j nežinomomis funkcijomis, šios bei (5) lygčių sistemų integruojamumo sąlygas užrašysime [1]:

$$\begin{cases} \underset{v}{\mathcal{L}}\, \Omega^i_{jk} = 0 \quad \left(\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{j\cdot k} - \Gamma^i_{k\cdot j}\right)\right), \\ \underset{v}{\mathcal{L}}\, \Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0, \\ \underset{v}{\mathcal{L}}\, R^i_{jk} = 0 \quad (i,\, j,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, 4), \end{cases} \tag{6}$$

ir visos kitos lygtys gautos pastarąsias kovariantiškai diferencijuojant po Lie išvestinės ženklu pagal x^l ir l^k iki N-tos eilės.

Jei integruojamumo sąlygose yra ρ nepriklausomų lygčių ir $N+1$ serija nepriklausomų lygčių skaičiaus ρ nepadidina, tai erdvė L_4 turi judesių grupę G_r, kur $r = 20 - \rho$.

Kaip įrodyta [2], erdvė L_4 su tiesine sietimi Γ^i_j turi maksimalią dvidešimties parametrų grupę tada ir tik tada, jei

$$\Gamma^i_j(x, l) = \Lambda^i_{jk}(x) l^k, \tag{7}$$

kur funkcijos $\Lambda^i_{jk}(x)$ tenkina sąlygas:

$$\partial_{[j}\Lambda^i_{k]l} + \Lambda^i_{[j|p|}\Lambda^p_{k]l} = 0, \tag{8}$$

$$\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}. \tag{9}$$

Ten pat [2] duotas pavyzdys, įrodantis, kad ši erdvių klasė nėra tuščia.

Teorema. *Erdvė L_4 negali turėti* 17, 18 *bei* 19 *parametrų judesių grupių.*

Įrodymas. Įrodysime, kad (6) sistemoje nepriklausomų lygčių skaičius ($\rho \geqslant 4$). Tarę priešingai ($0 < \rho \leqslant 3$), tirsime tokias (6) lygčių sistemos lygčių serijas:

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\, \Omega^i_{jk} = 0,$$

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\, \Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0,$$

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\, R^i_{jk\cdot l} = 0.$$

Parašysime jas tokiu pavidalu:

$$v^s A_s \begin{pmatrix} i \\ j\,k \end{pmatrix} + v_s^p A_p^s \begin{pmatrix} i \\ j\,k \end{pmatrix} = 0, \tag{10}$$

$$v^s T_s \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} + v_s^p T_p^s \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} = 0, \tag{11}$$

$$v^s R_s \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} + v_s^p R_p^s \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} = 0, \tag{12}$$

kur

$$A_s \begin{pmatrix} i \\ j\,k \end{pmatrix} = \nabla_s \Omega^i_{jk} + 2\Omega^i_{pk}\Omega^p_{sj} + 2\Omega^i_{pj}\Omega^p_{ks} + 2\Omega^p_{jk}\Omega^i_{ps} + 2\Omega^i_{jk\cdot l}\Omega^l_{sp} l^p, \tag{10a}$$

$$A^s_p \begin{pmatrix} i \\ j\,k \end{pmatrix} = -\delta^i_p \Omega^s_{jk} + \delta^s_j \Omega^i_{pk} + \delta^s_k \Omega^i_{jp} + \Omega^i_{jk\cdot p} l^s, \tag{10b}$$

$$T_s \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} = \nabla_s \Gamma^i_{jk\cdot l} + 2\Omega^i_{ps}\Gamma^p_{jk\cdot l} - 2\Omega^p_{js}\Gamma^i_{pk\cdot l} - 2\Omega^p_{ks}\Gamma^i_{jp\cdot l}$$
$$-2\Omega^p_{ls}\Gamma^i_{jk\cdot p} + 2\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot r}\Omega^r_{sp} l^p, \tag{11a}$$

$$T^s_p \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} = -\delta^i_p \Gamma^s_{jk\cdot l} + \delta^s_j \Gamma^i_{pk\cdot l} + \delta^s_k \Gamma^i_{jp\cdot l} + \delta^s_l \Gamma^i_{jk\cdot p} + \Gamma^i_{jk\cdot l\cdot p} l^s, \tag{11b}$$

$$R_s \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} = \delta_s R^i_{jk\cdot l} + 2\Omega^i_{ps} R^i_{jk\cdot p} - 2\Omega^p_{js} R^i_{pk\cdot l} - 2\Omega^p_{ks} R^i_{jp\cdot l}$$
$$-2\Omega^p_{ls} R^i_{jk\cdot p} + 2R^i_{jk\cdot l\cdot r}\Omega^r_{sp} l^p, \tag{12a}$$

$$R^s_p \begin{pmatrix} i \\ j\,k\,l \end{pmatrix} = -\delta^i_p R^s_{jk\cdot l} + \delta^s_j R^i_{pk\cdot l} + \delta^s_k R^i_{jp\cdot l} + \delta^s_l R^i_{jk\cdot p} + R^i_{jk\cdot l\cdot p} l^s, \tag{12b}$$

$(i,\ j,\ k,\ \ldots = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Tyrimus atliksime specialioje koordinačių sistemoje. Ją parinksime tokią, kad nagrinėjamame erdvės L_4 taške turėtume

$$l^i = \delta^i_{\alpha_1}. \tag{13}$$

$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$ žymėsime perstatinį $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$, t.y., $\alpha_i \neq \alpha_j$, jei $i \neq j$.

Pradėsime nuo (10) sistemos tyrimo.

Įrodysime, kad $\Omega^i_{jk} = 0$ $(i \neq j,\ \ i \neq \alpha_1)$.

Tegul $\Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2} \neq 0$. Tada matricos (10b) ketvirtos eilės minoras lygtyse $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1\,\alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1\,\alpha_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1\,\alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1\,\alpha_4 \end{pmatrix}$ prie funkcijų $v^{\alpha_1}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$ yra nelygus nuliui. Tai prieštarauja mūsų prielaidai, kad $0 < \rho \leqslant 3$, todėl $\Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2} = 0$.

Jeigu $\Omega^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4} \neq 0$, tai ketvirtos eilės minoras sudarytas iš koeficientų lygtyse $\binom{\alpha_1}{\alpha_3\,\alpha_4}$, $\binom{\alpha_2}{\alpha_3\,\alpha_4}$, $\binom{\alpha_3}{\alpha_3\,\alpha_4}$, $\binom{\alpha_4}{\alpha_3\,\alpha_4}$ prie funkcijų $v^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_3}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_4}_{\alpha_2}$ yra nelygus nuliui. Taigi, visos komponentės pavidalo $\Omega^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4} = 0$. Įrodysime, kad $\Omega^i_{jk} = 0$ $(i \neq j, k;\ i \neq \alpha_1)$.

Paėmę koordinačių transformaciją, nekeičiančią (13) ir tokią, kad $f^{\alpha_3}_{\alpha_2} = t$, $g^{\alpha_3}_{\alpha_2} = -t$, kiti $f^i_j = \delta^i_j$, $g^i_j = \delta^i_j$ iš $\bar\Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2} = 0$, gauname:

$$\bar\Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2} = \Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2} + t\left(\Omega^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2} - \Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_3}\right) - t^2\Omega^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3} = 0.$$

Pastaroji lygybė teisinga visiems t, todėl $\Omega^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2} = \Omega^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_3}$. Analogiškai, iš $\bar\Omega^{\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_4} = 0$ išplaukia $\Omega^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha_4} = \Omega^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_4}$. Gautos pereinamybės leidžia teigti, kad tenzorius Ω^i_{jk}, bet kokioje koordinačių sistemoje (kai $0 < \rho \leqslant 3$) turi struktūrą:

$$\Omega^i_{jk} = \delta^i_j\Omega_k - \delta^i_k\Omega_j + l^i\Omega_{jk}, \tag{14}$$

Iš (14) ir $\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega^i_{jk} = 0$ bei Lie išvestinės savybių gauname:

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega_i = 0, \tag{15}$$

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega_{jk} = 0. \tag{16}$$

Čia Ω_i ir Ω_{jk} yra tenzoriai atitinkamai nulinės ir minus pirmos homogeniškumo eilės.

Užrašykime (16) lygtis pavidalu:

$$\begin{aligned} &v^s\left(\nabla_s\Omega_{jk} - 2\Omega^p_{js}\Omega_{pk} - 2\Omega^p_{ks}\Omega_{jp} + 2\Omega_{jk\cdot r}\Omega^r_{sp}l^p\right) \\ &+v^p_s\left(\delta^s_j\Omega_{pk} + \delta^s_k\Omega_{jp} + \Omega_{jk\cdot p}l^s\right) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Įrodysime, kad jei $0 < \rho \leqslant 3$, tai $\Omega_{jk} = 0$.

Iš tikrųjų, jei $\Omega_{\alpha_1\alpha_3} \neq 0$, tai (17) lygtyse $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_1\alpha_3)$, $(\alpha_1\alpha_4)$, $(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)$ prie funkcijų $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_4}$ esantis 4 eilės minoras nelygus nuliui, todėl $\Omega_{\alpha_1\alpha_2} = 0$.

Jei $\Omega_{\alpha_2\alpha_3} \neq 0$, tai (17) lygtyse bei jų išvadose $\underset{v}{\mathcal{L}}\Omega_{jk\cdot l} = 0$ nepriklausomų lygčių skaičius $\rho \geqslant 4$. Tuo galima įsitikinti imant 4 eilės minorą lygtyse $(\alpha_2\alpha_3)$, $(\alpha_2\alpha_4)$, $(\alpha_4\alpha_3)$, $(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ prie funkcijų $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$, $v^{\alpha_3}_{\alpha_4}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_4}$.

Taigi,

$$\Omega_{jk} = 0. \tag{18}$$

Iš (15) lygčių ir jų išvadų $\underset{v}{\mathcal{L}}\Omega_{i\cdot j} = 0$, $\underset{v}{\mathcal{L}}\Omega_{i\cdot j\cdot k} = 0$ įrodysime, kad $\Omega_i = 0$, jei $0 < \rho \leqslant 3$.

Jei $\Omega_{\alpha_1} \neq 0$, tai (15) lygtyse yra 4 nepriklausomos lygtys, nes minoras prie funkcijų $v^{\alpha_1}_{\alpha_1}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_4}$ yra nelygus nuliui. Todėl $\Omega_{\alpha_1} = 0$.

Jei $\Omega_{\alpha_2} \neq 0$ ir $\Omega_{\alpha_1\cdot\alpha_2} = 0$, tai minoras prie funkcijų $v^{\alpha_2}_{\alpha_1}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$ yra nelygus nuliui.

Jei $\Omega_{\alpha_2} \neq 0$ ir $\Omega_{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \neq 0$, tai minoras lygtyse (α_2), (α_3), (α_4), $(\alpha_1\alpha_2\alpha_2)$ prie funkcijų $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_2}$ yra nelygus nuliui. Taigi visos komponentės $\Omega_i = 0$ ir iš (18) bei (14) turime:

$$\Omega^i_{jk} = 0. \tag{19}$$

Tuo būdu $\Gamma^i_{j \cdot k \cdot l}$ $(\Gamma^i_{j \cdot k} = \Gamma^i_{k \cdot j})$ yra simetrinis pagal visus apatinius indeksus. Dėl šios priežasties taškus, žyminčius diferencijavimą, praleisime.

Nagrinėsime (11) lygčių sistemą (13) koordinačių sistemoje. Tirsime šiuos atvejus $(0 < \rho \leqslant 3)$:

1) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_3} \neq 0$,

2) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4} \neq 0$ $(\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_3} = 0)$.

Pirmuoju atveju, minoras lygtyse $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ prie funkcijų $v^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_3}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_4}_{\alpha_2}$ yra nelygus nuliui ir $\rho \geqslant 4$, o tai reiškia, kad visos komponentės pavidalo $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_3}$ yra lygios nuliui.

Antruoju atveju, minoras lygtyse $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3\ \alpha_3\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ prie funkcijų $v^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_3}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_4}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_3}_{\alpha_2}$ yra nelygus nuliui, todėl $\rho \geqslant 4$ ir $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4} = 0$.

Įrodėme, kad $\Gamma^i_{jkl} = 0$ $(i \neq \alpha_1;\ \ i \neq j, k, l)$.

Kaip ir ankščiau, imdami atitinkamas koordinačių transformacijas iš $\bar{\Gamma}^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_3} = 0$ bei $\bar{\Gamma}^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4} = 0$ gausime $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_3} = \Gamma^{\alpha_4}_{\alpha_4\alpha_3\alpha_3}$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3} = 2\Gamma^{\alpha_4}_{\alpha_4\alpha_2\alpha_3}$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_2} = 3\Gamma^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_2}$.

Iš gautų pereinamybių seka, kad jei erdvės L_4 judesių grupės parametrų skaičius $r \geqslant 17$ $(0 < \rho \leqslant 3)$, tai tenzorius Γ^i_{jkl} turi struktūrą:

$$\Gamma^i_{jkl} = \delta^i_j A_{kl} + \delta^i_k A_{jl} + \delta^i_l A_{jk} + l^i A_{jkl}, \tag{20}$$

kur

$$A_{jk} l^k = 0, \quad A_{jk} = A_{kj}, \quad A_{jkl} = A_{jk \cdot l}. \tag{21}$$

Iš (20) ir $\underset{v}{\mathcal{L}}\, \Gamma^i_{jkl} = 0$, gausime:

$$\begin{cases} \underset{v}{\mathcal{L}}\, A_{jk} = 0, \\ \underset{v}{\mathcal{L}}\, A_{jkl} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Įrodysime, kad $A_{jk} = 0$, kai $0 < \rho \leqslant 3$. (13) koordinačių sistemoje tirsime du atvejus:

1) $A_{\alpha_2\alpha_2} \neq 0$,

2) $A_{\alpha_2\alpha_3} \neq 0$ $(A_{\alpha_2\alpha_2} = 0)$.

Pirmuoju atveju, minoras (22) sistemos lygtyse $(\alpha_2\ \alpha_2)$, $(\alpha_2\ \alpha_3)$, $(\alpha_2\ \alpha_4)$, $(\alpha_2\ \alpha_2\ \alpha_3)$ prie funkcijų $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_3}$, o antruoju atveju – minoras $(\alpha_2\ \alpha_3)$, $(\alpha_3\ \alpha_4)$, $(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_3)$, $(\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ prie funkcijų $v^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $v^{\alpha_2}_{\alpha_4}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_3}$, $v^{\alpha_1}_{\alpha_4}$ yra nelygus nuliui.

Abiem atvejais $\rho \geqslant 4$, todėl $A_{jk} = 0$. Pastebėsime, kad komponentės $A_{\alpha_1\alpha_2}$ yra lygios nuliui dėl (21) sąlygų. Taigi, $\Gamma^i_{jk\cdot l} = 0$ ir $\Gamma^i_j = \Lambda^i_{jk}(x)l^k$, $\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}$.

Integruojamumo sąlygų serijoje $\underset{v}{\mathcal{L}} R^i_{jk\cdot l} = 0$, šiuo atveju $R^i_{jk\cdot l} = 2(\partial_{[j}\Lambda^i_{k]l} + \Lambda^i_{[j|p|}\Lambda^p_{k]l})$. Kadangi $R^i_{jk\cdot l}$ priklauso tik nuo x, tai jei $R^i_{jk\cdot l} \neq 0$, tai sistemoje $\underset{v}{\mathcal{L}} R^i_{jk\cdot l} = 0$ yra ne mažiau keturios nepriklausomos lygtys [3]. Mūsų nagrinėjamu atveju ($0 < \rho \leqslant 3$), tai $R^i_{jk\cdot l} = 0$ ir tiesinė sietis Γ^i_j tenkina sąlygas (7), (8) ir (9). Kaip minėta anksčiau erdvė L_4 su tokia tiesine sietimi turi maksimalią 20 parametrų judesių grupę.

Teorema įrodyta.

Pastebėsime, kad erdvės L_4, turinčios 16 parametrų judesių grupes, egzistuoja [2].

Literatūra

[1] A.P. Urbonas, Les mouvements dans l'espace des éléments linéaires à connexion linéaire, *LMD XXXVIII konf. darbai*, Technika, Vilnius (1997), pp. 110–115.

[2] A.P. Urbonas, Sur la mobilité maximale des espaces L_n à connexion linéaire, *Liet. Matem. Rink.*, **38**(2), 265–275 (1998).

[3] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, Vol. I, II, Ed.Acad., Roumaine (1957).

Certaines propriétés des groupes des mouvements des espaces L_4

A.P. Urbonas, V. Marcinkevičius

On démontre que le groupes des mouvements des espaces L_4 à connexion linéaire ne peuvent pas avoir les groupes de 17, 18 et 19 paramètres.