Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 93–95

Apie apibendrintąsias Oilerio konstantas

Eugenijus STANKUS (VU)
el. paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ taške $s = 1$ turi paprastą polių. Jos Lorano skleidinio

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (s-1)^n$$

koeficientai A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, vadinami Stiltjeso konstantomis, o skaičiai

$$\gamma_n = (-1)^n n! A_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

– apibendrintosiomis Oilerio konstantomis, $\gamma_0 = A_0 = \gamma = 0{,}577215\ldots$ yra Oilerio konstanta. Oilerio konstantos skaičiuojamos pagal formules

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{\log^n j}{j} - \frac{\log^{n+1} m}{n+1} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ir jų tyrimams skirta daug darbų, pavyzdžiui, [1], [3], [5], [6].

1975 m. [4] darbe buvo pradėti nagrinėti Oilerio konstantų apibendrinimai aritmetinėms progresijoms. Tegu

$$H(x, r, k) = \sum_{\substack{0 < n \leqslant x \\ n \equiv r (\mathrm{mod}\, k)}} \frac{1}{n}.$$

Tuomet Oilerio konstantos γ analogas apibrėžiamas formule

$$\gamma(r, k) = \lim_{x\to\infty} \left\{ H(x, r, k) - \frac{1}{k} \log x \right\}.$$

Aišku, kad $\gamma(0, 1) = \gamma$, $\gamma(r \pm k, k) = \gamma(r, k)$. Minėtame darbe, o taip pat ir [2], įrodyta daug įvairių šių konstantų savybių, nustatyti jų ryšiai su Bernulio skaičiais, gama funkcijų reikšmėmis ir t.t. Darbe [2] pateikta įdomių Oilerio konstantų teorijos taikymų, tiriant kai kurių eilučių konvergavimą.

Pažymėkime

$$G_{r,k}(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r (\mathrm{mod}\, k)}}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \ \sigma > 1.$$

Ši funkcija analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą išskyrus tašką $s = 1$, kuriame ji turi paprastą polių su rezidiumu $\frac{1}{k}$. Iš tikrųjų, $G_{r,k}(s)$ išreiškiama Hurvico dzeta funkcija:

$$G_{r,k}(s) = k^{-s}\zeta\left(s, \frac{r}{k}\right), \tag{1}$$

čia

$$\zeta(s,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\omega)^{-s}, \quad \sigma > 0,\ 0 < \omega \leqslant 1,$$

o taško $s = 1$ aplinkoje

$$G_{r,k}(s) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{s-1} + \gamma(r,k) + \dots. \tag{2}$$

Šiame darbe įrodyta formulė konstantai $\gamma(r,k)$ yra ankstesnio autoriaus darbo [6] dalinis apibendrinimas aritmetinėms progresijoms.

Teorema. *Kai* $U \geqslant 2,\ m \in Z,\ m \geqslant 2,\ 0 < \varepsilon < 1$, *tuomet*

$$\gamma(r,k) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv r (\mathrm{mod}\, k)}}^{\infty} \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{n^2}{U}\right\} + \frac{\gamma}{2k} - \frac{\log U}{2k}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n k^{2n-1}}{n!\,U^n}\zeta\left(1-2n, \frac{r}{k}\right) + R(U,m),$$

čia

$$|R(U,m)| \leqslant C(k,m,\varepsilon)U^{-m-1+\varepsilon}.$$

Įrodymas. Nagrinėkime eilutę

$$T_{r,k}(U) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv r (\mathrm{mod}\, k)}}^{\infty} \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{n^2}{U}\right\}.$$

Pritaikę žinomą formulę

$$\mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re z = b}\Gamma(z)y^{-z}\mathrm{d}z, \quad y > 0,\ b > 0,$$

gausime:

$$T_{r,k}(U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s = 1}\frac{1}{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)U^{\frac{s}{2}}G_{r,k}(s+1)\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Pointegralinė funkcija turi paprastus polius taškuose $s = 0$ ir $s = -2n$, kai $n = 1, 2, \ldots$. Apskaičiuokime pointegralinės funkcijos rezidiumus šiuose taškuose. Kadangi taško $s = 0$ aplinkoje teisinga (2) lygybė ir be to

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = 1 - \frac{\gamma}{2}s + \cdots,$$
$$U^{\frac{s}{2}} = 1 + \frac{\log U}{2}s + \cdots,$$

tai

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left\{\frac{1}{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)U^{\frac{s}{2}}G_{r,k}(s+1)\right\} = \gamma(r,k) - \frac{\gamma}{2k} + \frac{\log U}{2k}.$$

Iš to, kad

$$\operatorname*{Res}_{s=-2n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!},$$

gausime

$$\operatorname*{Res}_{s=-2n}\left\{\frac{1}{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)U^{\frac{s}{2}}G_{r,k}(s+1)\right\} = \frac{(-1)^n k^{2n-1}}{n!\,U^n}\zeta\left(1-2n, \frac{r}{k}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pritaikę (3) integralui rezidiumų teoremą (perkėlę integravimo kontūrą į tiesę $s = -2m - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$) ir įvertinę liekamuosius narius, gausime teoremos formulę.

Literatūra

[1] J. Bohman, C.-E. Fröberg, The Stieltjes function – definition and properties, *Math. Comp.*, **51**, 281–289 (1988).

[2] K. Dilcher, Generalized Euler constants for arithemetical progressions, *Math. Comp.*, **59**, 259–282 (1992).

[3] M.I. Israilov, On the Laurent expansion of the Riemann zeta-function, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **158**, 98–104 (1981) (in Russian).

[4] D.H. Lehmer, Euler constants for arithmetical progressions, *Acta Arith.*, **27**, 125–142 (1975).

[5] Y. Matsuoka, On the power series coefficients of the Riemann zeta function, *Tokyo J. Math.*, **12**, 49–58 (1989).

[6] E.P. Stankus, A remark on the coefficients Laurent series of the Riemann zeta function, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.* (*LOMI*), **121**, 103–107 (1983) (in Russian).

On generalized Euler constants

E. Stankus

The generalized Euler constants are defined by formulas

$$\gamma(r,k) = \lim_{x\to\infty}\left\{\sum_{\substack{0<n\leqslant x\\ n\equiv r(\mathrm{mod}\ k)}}\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\log x\right\}.$$

The explicit formula for $\gamma(r,k)$ is obtained applying the method of contour integration.