Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 83–86

Геометрия распределения флагов четномерного аффинного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Если N-мерное аффинное пространство A_N $(n = 2m+2;\ m = 1,2,\ldots,n)$ отнесено к подвижному реперу $(M,\vec{e}_i)$ $(i,j,\ldots = 1,\ldots,N)$, то инфинитезимальное смещение такого репера определяется дифференциальными уравнениями

$$d\vec{M} = \omega^i\vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j.$$

Множество $Gr(m,N)$ всех m-плоскостей пространства A_N называется многообразием Грассмана. Флагом (возрастающим) типа $(m,m+1)$ в пространстве A_N называется такая пара $(l_m,\Pi_{m+1}) \in Gr(m,N)\times Gr(m+1,N)$, что $l_m \subset \Pi_{m+1}$. Распределением K_{m+1} флагов типа $(m,m+1)$ на грассмановом многообразии $Gr(m,N)$ назовем распределение $(m+1)$-плоскостей Π_{m+1} на многообразии $Gr(m,N)$, каждая $(m+1)$-плоскость которого проходит через соответствующую m-плоскость l_m.

Пусть репер $(M,\vec{e}_i)$ выбран так, что $l_m = (M,\vec{e}_p)$, $\Pi_{m+1} = (l_m,\vec{e}_N)$, где $p,q,\ldots = 1,2,\ldots,m$. В частично канонизированном репере распределение K_{m+1} флагов типа $(m,m+1)$ определяется дифференциальными уравнениями $(\alpha,\beta,\ldots = m+1,\ldots,2m+1)$

$$\omega_N^\alpha = \lambda_\beta^\alpha\omega^\beta + \lambda^\alpha\omega^N + \lambda_\beta^{\alpha p}\omega_p^\beta + \lambda^{\alpha p}\omega_p^N$$

и соответствующими внешними квадратичными уравнениями.

Распределение K_{m+1} назовем оснащенным (или нормализованным) в смысле Нордена–Гринцевичюса, если к каждой m-плоскости l_m этого распределения присоединены два подпространства $\Pi_I(l_m)$ и $\Pi_{II}(l_m)$ пространства A_N, причем первое из них (нормальное пространство первого рода) определяется уравнением

$$\Pi_I(l_m)\colon\ x^N = \nu_\alpha x^\alpha,$$

а второе (нормальное пространство второго рода) – уравнениями

$$\Pi_{II}(l_m)\colon\ \nu x^N = 1, \quad x^p = \nu^p x^N, \quad x^\alpha = 0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Величины*

$$V = -\frac{1}{m+1}\left(\lambda^{\alpha}_{\alpha} + \lambda^{\alpha}\nu_{\alpha}\right), \tag{1}$$

$$V^p = -\frac{1}{m+1}\left(\lambda^{\alpha p}_{\alpha} + \lambda^{\alpha p}\nu_{\alpha}\right) \tag{2}$$

определяют нормальное пространство второго рода распределения флагов K_{m+1}.

Отметим, что уравнения (1) и (2) устанавливают соответствие Бомпь–Яни–Пантази между нормальными пространствами $\Pi_I(l_m)$ и $\Pi_{II}(l_m)$.

Определитель

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda^{m+1} & \lambda^{m+1,1} & \dots & \lambda^{m+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{2m+1} & \lambda^{2m+1,1} & \dots & \lambda^{2m+1,m} \end{vmatrix}$$

является относительным инвариантом. Предпологая, что $\Lambda \neq 0$, введем величины A_α, B^p_α, C_α, $M_{p\alpha}$, $N^q_{p\alpha}$ и $K_{p\alpha}$, связанные с величинами λ^α_β, λ^α, $\lambda^{\alpha p}_\beta$ и $\lambda^{\alpha p}$ соотношениями

$$\begin{aligned}
&\lambda^\alpha C_\beta + \lambda^{\alpha p} K_{p\beta} = \delta^\alpha_\beta, \\
&\lambda^\alpha_\beta + \lambda^\alpha A_\beta + \lambda^{\alpha p} M_{p\beta} = 0, \\
&\lambda^{\alpha q}_\beta + \lambda^\alpha B^q_\beta + \lambda^{\alpha p} N^q_{p\beta} = 0, \\
&C_\alpha \lambda^\alpha = 1, \qquad\qquad K_{p\alpha}\lambda^{\alpha q} = \delta^q_p, \\
&A_\alpha = -C_\beta \lambda^\beta_\alpha, \qquad M_{p\alpha} = -K_{p\beta}\lambda^\beta_\alpha, \\
&B^p_\alpha = -C_\beta \lambda^{\beta p}_\alpha, \qquad N^q_{p\alpha} = -K_{p\beta}\lambda^{\beta q}_\alpha, \\
&C_\alpha \lambda^{\alpha p} = 0, \qquad\qquad K_{p\alpha}\lambda^\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Геометрический объект*

$$\varrho_\alpha = \frac{1}{m+1}\Big(A_\alpha + N^p_{p\alpha} - \nu C_\alpha - \nu^p K_{p\alpha}\Big)$$

определяет нормальное пространство первого рода $\Pi_I(l_m)$.

Система величин

$$\overset{*}{a}_\alpha = -\frac{1}{m+1}\left(A_\alpha + N^p_{p\alpha}\right)$$

позволяет установить соответствие между нормальными пространствами $\Pi_I(l_m)$ и $\Pi_{II}(l_m)$:

$$\nu = -(m+1)\lambda^{\alpha}(\varrho_{\alpha} + \overset{*}{a}_{\alpha}),$$
$$\nu^p = -(m+1)\lambda^{\alpha p}(\varrho_{\alpha} + \overset{*}{a}_{\alpha}).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Величины*

$$l = \frac{m+1}{m(m+2)}(\overset{*}{a}_{\alpha}\lambda^{\alpha} - \lambda^{\alpha}_{\alpha}),$$
$$l^p = \frac{m+1}{m(m+2)}(\overset{*}{a}\lambda^{\alpha p} - \lambda^{\alpha p}_{\alpha})$$

определяют внутреннее нормальное пространство $\Pi_{II}(l_m)$. *Величины*

$$H_{\alpha} = -\frac{1}{m+1}(lC_{\alpha} + l^p K_{p\alpha}) - \overset{*}{a}_{\alpha}$$

определяют внутреннее нормальное пространство $\Pi_I(l_m)$.

Величины H_{α} удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla H_{\alpha} + H_{\alpha}\omega^N_N + \omega^N_{\alpha} = H_{\alpha\beta}\omega^{\beta} + \overline{H}_{\alpha}\omega^N + H^p_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_p + H^p_{\alpha}\omega^N_p.$$

Распределение флагов K_{m+1} будем называть оснащенным в смысле Э. Картана, если каждой m-плоскости l_m этого распределения отнесена m-плоскость $C_m(l_m)$, не пересекающая $(m+1)$-плоскость Π_{m+1}:

$$C_m(l_m)\colon\ m_{\alpha}x^{\alpha} = 1, \quad x^p = m^p_{\alpha}x^{\alpha}, \quad x^N = \overline{m}_{\alpha}x^{\alpha}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Система величин* $\{H_{\alpha}, \widetilde{H}_{\alpha}, \widetilde{H}^p_{\alpha}\}$, *где*

$$\widetilde{H}_{\alpha} = H_{\alpha}H_{\beta}\lambda^{\beta} - \overline{H}_{\alpha},$$
$$\widetilde{H}^p_{\alpha} = H_{\alpha}H_{\beta}\lambda^{\beta p} - H^p_{\alpha},$$

образует геометрический объект, определяющий внутреннее оснащение распределения K_{m+1} *в смысле Э. Картана.*

Распределение флагов K_{m+1} будем называть оснащенным в смысле Э. Бортолотти, если каждой m-плоскости l_m этого распределения присоединена $(m+1)$-плоскость

$$B_{m+1}(l_m) : \begin{cases} K_\alpha x^\alpha + K x^N = 1, \\ x^p = K^p_\alpha x^\alpha + K^p x^N \end{cases}$$

пространства A_N, не проходящая через m-плоскость l_m.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Геометрический объект* $\{G_\alpha, G^p_\alpha, l, l^p_\alpha\}$, *где*

$$G_\alpha = \widetilde{H}_\alpha - H_\alpha l,$$
$$G^p_\alpha = \widetilde{H}^p_\alpha - H_\alpha l^p,$$

определяет инвариантное внутреннее оснащение распределения K_{m+1} *в смысле Э. Бортолотти.*

Geometry of distribution of flags in an even-dimensional affine space

K. Navickis

In this article the problem of intrinsic normalizations of distribution of flags in an even-dimensional affine space is considered.