

К вопросу о зависимости скорости сходимости от метрики

Ольга ЯНУШКЯВИЧЕНЕ (МП, VPU)

e-mail: olgjan@takas.lt

1. Введение

В настоящей работе проводится сравнение скорости сходимости некоторых полиномов от случайных величин в метрике Леви и ζ_1 . Заметим, что так как скорость сходимости оценена и сверху, и снизу, то порядок полученных оценок является точным.

Результаты работы представляют собой часть совместного исследования с профессором В. Бенткусом.

Напомним определение упомянутых метрик.

Метрика Леви:

$$\begin{aligned} L(X, Y) &= L(F, G) \\ &= \inf\{\varepsilon: F(x) \leq G(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in R\} \end{aligned}$$

где $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно.

Метрика ζ_1 :

$$\zeta_1(X, Y) = \sup_f |Ef(x) - Ef(y)|,$$

где \sup берется по всем функциям f , для которых выполняется условие

$$|f(x) - f(u)| \leq |x - u|.$$

Также мы будем использовать метрику Леви–Прохорова:

$$\begin{aligned} \pi(X, Y) &= \pi(P_X, P_Y) = \inf\{\varepsilon: P_X(A) \leq P_Y(A^\varepsilon) + \varepsilon, \\ &P_Y(A) \leq P_X(A^\varepsilon) + \varepsilon, \quad A \in \mathbf{B}\}, \end{aligned}$$

где \mathbf{B} – система борелевских множеств на R и $A^\varepsilon = \{x: |x - y| < \varepsilon, y \in A\}$ – ε -окрестность множества A , а также метрику Ки Фан:

$$K(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0: P(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon\}.$$

2. Основные результаты

Пусть X, X_1, \dots, X_n – независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.) такие, что

$$EX = 0, \quad EX^2 = 1, \quad E|X|^3 = \beta_3, \quad EX^4 = \beta_4 < \infty. \quad (1)$$

Рассмотрим статистику

$$T = T_2^2 - T_1,$$

где

$$T_2 = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}, \quad T_1 = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$$

и $Y_i = X_i^2 - 1$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. При выполнении условий (1) существуют $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, зависящие лишь от первых шести моментов с.в. X такие, что

$$c_1 \sqrt{\ln n} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \leq L(T, N^2) \leq c_2 \sqrt{\ln n} \cdot n^{-\frac{1}{2}}, \\ c_3 n^{-\frac{1}{2}} \leq \zeta_1(T, N^2) \leq c_4 n^{-\frac{1}{2}},$$

где N – стандартная нормальная с.в.

3. Доказательства

3.1. Оценка скорости сходимости в метрике Леви

3.1.1. Оценка сверху

Согласно неравенству треугольника

$$L(T, N^2) \leq L(T, T_2^2) + L(T_2^2, N^2) = l_1 + l_2, \quad (2)$$

где l_1 и l_2 – соответственно первое и второе слагаемое в правой части (2).

Оценим сначала l_2 . Используя неравенство $L(X, Y) \leq \rho(X, Y)$, получаем:

$$l_2 \leq \rho(T_2^2, N^2).$$

Так как равномерная метрика инвариантна относительно монотонных преобразований, нетрудно видеть, что

$$l_2 = \rho(T_2, N) \leq c\beta_3/\sqrt{n}.$$

Оценим теперь l_1 .

Если $\beta_4 = 1$, то это равносильно тому, что

$$E(X^2 - 1)^2 = 0,$$

или $X^2 = 1$ с вероятностью 1. Тогда $K(T, T_2) = 0$ и $l_1 = 0$.

Поэтому будем предполагать, что $\beta_4 \neq 1$.

Согласно [1], стр. 111,

$$l_1 = L(T, T_2) \leq \pi(T, T_2).$$

С другой стороны, метрика Леви–Прохорова является минимальной по отношению к метрике Ки Фан (см. [1], стр. 59). Следовательно,

$$\pi(T, T_2) \leq K(T, T_2) = \inf \left\{ \varepsilon > 0: P \left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 1) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \varepsilon \right\}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$\pi(T, T_2) \leq 2L \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, 1 \right).$$

Используя инвариантность метрики Леви относительно сдвига на константу, а также неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} L \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, 1 \right) &= L \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i}{\sqrt{n}}, 0 \right) \\ &\leq L \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i}{\sqrt{n} \sqrt{\beta_4 - 1}}, \frac{N}{\sqrt{n}} \right) + L \left(\frac{N}{\sqrt{n}}, 0 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\zeta_i = X_i^2 - 1$.

В [4] для $L_0 = L(\varepsilon N, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ было получено следующее выражение:

$$L_0 = \sqrt{2} |\varepsilon| \sqrt{\ln(1/|\varepsilon|) + c + o(1)} = \sqrt{2} |\varepsilon| \sqrt{\ln(1/|\varepsilon|)} + o(|\varepsilon| \sqrt{\ln(1/|\varepsilon|)}).$$

Следовательно,

$$L \left(\frac{N}{\sqrt{n}}, 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\ln(\sqrt{n})} (1 + o(1)) = \sqrt{\frac{2 \ln n}{n}} (1 + o(1)).$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в сумме (3). Так как $L(X, Y) \leq \rho(X, Y)$, то

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i}{\sqrt{n}\sqrt{\beta_4-1}}, \frac{N}{\sqrt{n}}\right) &\leq \rho\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i}{\sqrt{n} \operatorname{sqrt}\beta_4-1}, \frac{N}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \rho\left(\frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i}{\sqrt{n}\sqrt{\beta_4-1}}, N\right) \leq c \frac{\beta_6}{(\beta_4-1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

3.1.2. Оценка снизу

Нетрудно видеть, что

$$T = (n-1)\bar{X}^2 - S^2 + 1,$$

где

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2.$$

Предположим, что $X_i \stackrel{d}{=} N(0, 1)$. Хорошо известно, что в этом случае случайные величины \bar{X} и S^2 независимы и $nS^2 \stackrel{d}{=} \chi^2(n-1)$.

Нетрудно видеть, что

$$T = \frac{n-1}{n}N^2 + \chi^2(n-1) + 1.$$

Обозначим функцию распределения (ф.р.) случайной величины $\frac{n-1}{n}N^2$ символом F , а ф.р. случайной величины $\frac{n-1}{n}N^2 - \chi^2(n-1) + 1$ символом F_1 . Согласно определению расстояния Леви получаем, что

$$\begin{aligned} L\left(\frac{n-1}{n}N^2, \frac{n-1}{n}N^2 - \chi^2(n-1) + 1\right) \\ = \inf \left\{ \varepsilon: F_1(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in R \right\}. \end{aligned}$$

Так как для $x \leq 0$ справедливо соотношение $F(x) = 0$, то

$$\begin{aligned} L\left(\frac{n-1}{n}N^2, \frac{n-1}{n}N^2 - \chi^2(n-1) + 1\right) \\ \geq \inf \{ \varepsilon F_1(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq 0 \leq F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon, \quad x \leq 0 \} = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Так как $F_1(x+\varepsilon) + \varepsilon \geq 0$ всегда, то ε_0 является решением уравнения

$$F_1(-\varepsilon) = \varepsilon.$$

Используя для оценки корня этого уравнения метод, предложенный в [2], получаем:

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2 \ln n}{n}}(1 + o(1)),$$

откуда и следует записанная в утверждении теоремы оценка снизу в метрике Леви.

3.2. Оценка скорости сходимости в метрике ζ_1

Согласно неравенству треугольника

$$\zeta_1(T, N^2) \leq \zeta_1(T, T_2^2) + \zeta_1(T_2^2, N^2). \quad (4)$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\begin{aligned} |Ef(T) - Ef(T_2^2)| &\leq \frac{1}{n} E \left| \sum_{k=1}^n (X_k^2 - 1) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(E \left| \sum_{k=1}^n (X_k^2 - 1) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n E(X_k^2 - 1)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{2}{n} \left(\sum_{k=1}^n \beta_4^{1/2} \right) = \frac{2\beta_4^{1/2}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Оценим теперь второе слагаемое в сумме (4):

$$\begin{aligned} \sup_f |Ef(T_2^2) - Ef(N^2)| &= \int_{-\infty}^{\infty} |P\{T_2^2 < x\} - P\{N^2 < x\}| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |P\{T_2 < u\} - P\{N < u\}| du \\ &= 2\zeta_1(T_2, N) \leq \frac{c\beta_3}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|Ef(T_2^2 - T_1) - Ef(N^2)| \leq \frac{c\beta_3}{\sqrt{n}} + \frac{c\beta_4^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

Так как $EX_k^2 = 1$, то

$$\beta_3 = E|X||X|^2 \leq \beta_4^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\zeta_1(T_2^2 - T_1, N^2) \leq \frac{c\beta_4^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем и оценку снизу в метрике ζ_1 . Теорема доказана.

Литература

- [1] В.М. Золотарев, Современная теория суммирования независимых случайных величин, М., Наука, 1986.
- [2] A. Basalykas, O. Yanushkevichiene, On exact order of convergence of random polynomials, *J. Math. Sci.*, **99**(3), 1234–1243 (2000).
- [3] V. Bentkus, On the dependence of Berry–Essen bound on dimension, *J. Stat. Plan. and Inference*, **113**, 385–402 (2003).
- [4] O. Yanushkevichiene, On the rate of convergence of second-degree random polynomials, *J. Math. Sci.*, **92**(3), 3955–3959 (1998).

Konvergavimo greičio priklausomybės nuo metrikos klausimu

О. Янушкевичене

Gauti stochastinio polinomo konvergavimo greičio įverčiai dviejose metrikose. Gautų įverčių eilė yra tiksli.