Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 673–676

Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Sakykime, kad yra dvi atsitiktinių dydžių (a.d.) sekos:

- $\{X_j, j \geqslant 1\}$ – nepriklausomieji aatsitikiniai dydžiai su skirstinio funkcija $F(x) = \mathrm{P}(X_j < x), j \geqslant 1$;
- $\{N = N_n, n \geqslant 1\}$ – atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys tik sveikas teigiamas reikšmes ir nepriklausantys nuo visų $X_j, j \geqslant 1$.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max\left(X_j, j = \overline{1,n}\right), Z_N = \max\left(X_j, j = \overline{1,N}\right).$$

Žinoma B.V. Gnedenkos perkėlimo teorema [1].

1 teorema. *Tarkime, kad egzistuoja tokios normavimo konstantų sekos* $\{a_n, n \geqslant 1\}$ *ir* $\{b_n, n \geqslant 1\}$, *su kuriomis*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = H(x)$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{1}{n} N_n < x\right) = A(x).$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = \Psi(x);$$

čia

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)\, \mathrm{d}A(z).$$

Yra šios teoremos apibendrinimų ir patikslinimų (pavyzdžiui, [2], [3])

Mus domina atvejai, kai
N – geometrinis: $\mathrm{P}(N=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k \geqslant 1$;
X_j – logistinis: $F(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, $x \in R$;
X_j – apibendrintas logistinis: $F(x)=F(x,\alpha)=\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^{\alpha}}$, $\alpha>0$.
Imdami normavimo konstantas $a_n=\ln n$ ir $b_n=1$, logistinių dydžių atveju gauname:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{Z_n-a_n}{b_n}<x\right)=H(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in R. \tag{1}$$

Atsitiktinio dydžio $p_n N_n$ charakteristinė funkcija

$$f_{p_n N_n}(t)=\frac{p_n \mathrm{e}^{itp_n}}{1-\mathrm{e}^{itp_n}(1-p_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-it},$$

jeigu tik $p_n \to \infty$, kai $n \to \infty$.
Todėl

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(p_n N_n<x)=A(x)=1-\mathrm{e}^{-x}, \quad x \geqslant 0. \tag{2}$$

Iš (1), (2) ir perkėlimo teoremos, kai $p_n=\frac{1}{n}$, gauname:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{Z_{N_n}-a_n}{b_n}<x\right)=\Psi(x)=F(x). \tag{3}$$

Tokiu būdu iš šios teoremos išplaukia, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1^{(p_n)}, X_2^{(p_n)}, \ldots, X_{N_n}^{(p_n)}$ yra asimptotiškai geometriškai maks-stabilieji [4]. Čia atsitiktiniai dydžiai $X_j^{(p_n)}=X_j-\ln n$, $j=\overline{1,N_n}$. Kadangi $\Psi(x)$ (3) sąryšyje yra ribinė skirstinio funkcija, tai natūralu ieškoti konvergavimo greičio perkėlimo teoremoje logistiniams dydžiams.

Apibrėžimas [3]. Atsitiktinį dydį vadiname goemetiškai maks-stabiliuoju, jeigu

$$\mathrm{P}(X_1<x)=\mathrm{P}\left(\max\left(X_1^{(p)},\ldots,X_N^{(p)}\right)<x\right);$$

čia $\mathrm{P}(N=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k \geqslant 1$.

Šiame straipsnyje tiesioginiu būdu (nesinaudojant perkėlimo teorema), pagrįsime, jog logistinis dydis yra geometriškai maks-stabilus. Toiu būdu atkris konvergavimo greičio įverčio problema perkėlimo teoremoje. Atliksime apibendrintųjų logistinių dydžių geometrinių maksimumų analizę.

2. Rezultatų formuluotė ir įrodymas

2 teorema. *Jeigu* X_1 – *logistinis dydis, tai*

$$\mathrm{P}(Z_N+\ln p<x)=F(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Jeigu X_1 – apibendrintasis logistinis dydis ir $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, *tai*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(Z_N + \ln\frac{p_n}{\alpha} < x\right) = F(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Įrodymas. Pasinaudoję pilnosios tikimybės formule, gauname:

$$\mathrm{P}(Z_N + \ln p < x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^k(x - \ln p)\mathrm{P}(N=k)$$
$$= p\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x+\ln p}}\right)^k (1-p)^{k-1} = \frac{p}{1+\mathrm{e}^{-x}p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-p}{1+\mathrm{e}^{-x}p}\right)^{k-1}.$$

Kadangi

$$0 < \frac{1-p}{1+\mathrm{e}^{-x}p} < 1,$$

tai

$$\mathrm{P}(Z_N + \ln p < x) = \frac{p}{(1+\mathrm{e}^{-x}p)\left(1 - \frac{1-p}{1+\mathrm{e}^{-x}p}\right)} = F(x).$$

Toliau, tarkime, kad $p = p_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Tada apibendrintųjų logistinių dydžių atveju

$$\mathrm{P}\left(Z_N + \ln\frac{p_n}{\alpha} < x\right) = p_n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}\frac{p_n}{\alpha}}\right)^{\alpha k}(1-p_n)^{k-1}$$
$$= \frac{p}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\frac{p_n}{\alpha}\right)^{\alpha}}\frac{1}{1-\frac{1-p_n}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\frac{p_n}{\alpha}\right)^{\alpha}}} = \frac{p_n}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\frac{p_n}{\alpha}\right)^{\alpha} - (1-p_n)}.$$

Kadangi

$$(1+y_n)^{\alpha} = 1 + \alpha y_n + \mathrm{o}(y_n), \quad \text{kai } y_n \to 0,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(Z_N + \ln\frac{p_n}{\alpha} < x\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{1+\mathrm{e}^{-x}p_n + p_n - 1 + \mathrm{o}(p_n)}$$
$$= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = F(x).$$

Teorema įrodyta.

3. Komentarai

1. Perkėlimo teoremoje $p_n = \frac{1}{n}$. Tiesioginiame 2 teoremos įrodyme pakanka, kad $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0\,(\alpha \neq 1)$.
2. Logistinio skirstinio atveju $(\alpha = 1)$ dydžiai $X_j, j = \overline{1, N}$ yra geometriškai maks-stabilieji:

$$\mathrm{P}\,(X_j < x) = \mathrm{P}\left(\max\left(X_j^{(p)}, j = \overline{1, N}\right) < x\right);$$

čia

$$X_j^{(p)} = X_j + \ln p.$$

Atkrinta konvergavimo greičio analizė.

3. Kai $\alpha \neq 1$, apibendrintasis logistinis dydis nėra maks-stabilusis. Čia konvergavimo greičio analizė yra aktuali.
4. Antrąją teoremą galima perkelti į minimumų schemą, kai $W_N = \min\left(X_j, j = \overline{1, N}\right)$. Kadangi logistinio skirstinio atveju $F\,(-x) = 1 - F\,(x)$, tai aišku, jog

$$\mathrm{P}\,(W_N - \ln p) < x = F\,(x),$$

t.y. atsitikitinis dydis X_j yra geometriškai mini-stabilusis.

Literatūra

[1] В. Гнеденко и др., О распределениях Лапласа и логическом как предельных в теории вероятностей, *Сердико*, **8**, 229–134 ??? (1984).

[2] Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Наука, Москва (1984).

[3] R. N. Pilai, Harmonic mixtures and geometric infinite divisibility, *J. Ind. Statist. Assoc.*, **28**, 45–57 (1990).

[4] S. Rachev, S. Mittnik, *Stable Paretian Models in Finance*, John Willey & Sons LTD, New York, Singapore, Toronto (2000).

[4] A. Aksomaitis, Rate of convergance in the transference max-limit theorems, in: Proceedings *Probability, Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, VSP, TEV (1999).

Transference theorem and geometric max-stable random variables

A. Aksomaitis

Transference theorems for logistic and generalized logistic random variables and comparison of direct calculations are given. These rezults specify the rezults of [1].