

# Vieno tikimybių teorijos uždavinio išlygiagretinimo patirtis

Aleksandras KRYLOVAS, Juozas RAULYNAITIS (VGTU)

el. paštas: akr@fm.vtu.lt

1. Realiose sąlygose, ypač esant dideliame studentų skaičiui, sunku užtikrinti uždavinių sprendimo savarankiškumą. Vienas iš galimų šios problemos sprendimų yra parengimas skirtingų, bet iš esmės ekvivalenčių to paties uždavinio variantų. Tokius variantus galima gauti, pavyzdžiui, sprendžiant tam tikrą uždavinį su skirtingomis parametru reikšmėmis. Jei šios reikšmės parinktos taip, kad uždavinys neįgyja kokybiškai naujų atvejų bei neatsiranda papildomo didelės apimties techninio darbo, mes kalbame apie uždavinio *lygiagrečius* variantus. Jie leidžia ne tik pasiūlyti kiekvienam studentui individualų uždavinio variantą, bet ir yra patogūs žinioms pakartotinai tikrinti: galima pateikti lygiagretųjį variantą antrą arba net trečią kartą.

Aukštosios matematikos uždavinių lygiagretieji variantai buvo taikomi kaip tyrimo įrankis autorių darbuose [1–4]. Tačiau patys uždavinio išlygiagretinimo principai, lygiagrečiųjų variantų tyrimas bei jų palyginimas su baziniu uždaviniu, autorių manymu, reikalauja atskiro nagrinėjimo. Šio darbo bazinis uždavinys yra 2002 metų matematikos valstybinio brandos egzamino 15-asis uždavinys:

*Turnyre dalyvauja dvi šachmatininkų komandos. Kiekvienoje komandoje – po du žaidėjus. Kiekvienas pirmosios komandos šachmatininkas žaidžia po vieną partiją su antrosios komandos kiekienu žaidėju. Už laimėtą partiją komanda gauna 2 taškus, už lygiąsias – 1 tašką, už pralaimėtą – taškų negauna. Tikimybė pirmosios komandos šachmatininkui partiją laimėti lygi lygiųjų tikimybei ir lygi pralaimėjimo tikimybei. Kiekvienos partijos baigtis nepriklauso nuo kitų partijų baigčių. Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmoji komanda surinks: 8 taškus; 7 taškus; 6 taškus; ne mažiau kaip 6 taškus.*

2. Elementarioji pateikto uždavinio analizė (žr. [5]) rodo, kad uždaviniui spręsti reikia žinoti nesutaikomų įvykių tikimybių sudėties teoremą ir nepriklausomų įvykių tikimybių daugybos teoremą. Šių žinių taip pat pakanka, sprendžiant bet kurį uždavinį su parametrais  $p_{ij}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ;  $k = 0, 1, 2$ :

- $p_{ij}^{(2)}$  – tikimybė, kad pirmosios komandos  $i$ -asis ( $i = 1, 2$ ) žaidėjas laimės prieš antrosios komandos  $j$ -ąjį ( $j = 1, 2$ ) žaidėją;
- $p_{ij}^{(1)}$  – tikimybė, kad pirmosios komandos  $i$ -asis ( $i = 1, 2$ ) žaidėjas ir antrosios komandos  $j$ -asis ( $j = 1, 2$ ) žaidėjas sužais lygiosiomis;
- $p_{ij}^{(0)} = 1 - p_{ij}^{(2)} - p_{ij}^{(1)}$  – tikimybė, kad pirmosios komandos  $i$ -asis ( $i = 1, 2$ ) žaidėjas pralaimės antrosios komandos  $j$ -ajam ( $j = 1, 2$ ) žaidėjui.

Taigi turi būti žinomos bet kurios dvi iš trijų tikimybių  $p_{ij}^{(0)}$ ,  $p_{ij}^{(1)}$ ,  $p_{ij}^{(2)}$  kiekvienai iš keturių žaidėjų kombinacijai  $(i, j) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ . Visos tikimybių  $p_{ij}^{(k)}$  reikšmės parengtuose testuose buvo paprastosios trupmenos su vardikliu 2, 3, 4, 5 arba 7:

$$p_{ij}^{(k)} \in \left\{ \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Toks reikšmių parinkimas užtikrina neesminius techninio darbo apimčių skirtumus atskiruose variantuose.

Kitas uždavinio išlygiagretinimo parametras yra žaidėjų  $Z_{ij}$  vardų atsitiktinis parinkimas iš ilgo sąrašo lietuviškų vyriškų bei moteriškų vardų. Pateiksime uždavinio vieno lygiagrečiojo varianto struktūrą:

*Turnyre dalyvauja dvi šachmatininkų komandos. Kiekvienoje komandoje – po du žaidėjus. Pirmoje komandoje žaidžia  $Z_{11}$  ir  $Z_{12}$ , antroje –  $Z_{21}$  ir  $Z_{22}$ . Kiekvienas pirmosios komandos šachmatininkas žaidžia po vieną partiją su antrosios komandos kiekvienu žaidėju. Kiekvienos partijos baigtis nepriklauso nuo kitų partijų baigčių. Už laimėtą partiją komanda gauna 2 taškus, už lygiąsias – 1 tašką, už pralaimėtą – taškų negauna.*

*Pateikiami žaidžiamų partijų variantai:*

*(v) Tikimybė, kad  $Z_{1i}$  laimės prieš  $Z_{2j}$  (sužais lygiosiomis su  $Z_{2j}$ ) lygi  $p_{ij}^{(2)}$  ( $p_{ij}^{(1)}$ ); tikimybė, kad  $Z_{1i}$  ir  $Z_{2j}$  sužais lygiosiomis ( $Z_{2j}$  laimės prieš  $Z_{1i}$ ) yra  $p_{ij}^{(1)}$  ( $p_{ij}^{(0)}$ ). Čia*

<i>v</i>	1	2	3	4
<i>i</i>	1	1	2	2
<i>j</i>	1	2	1	2

*Apskaičiuokite tikimybę, kad*

- |                                                  |                                                  |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1) pirmoji komanda surinks 8 taškus;             | 2) antroji komanda surinks 8 taškus;             |
| 3) pirmoji komanda surinks 7 taškus;             | 4) antroji komanda surinks 7 taškus;             |
| 5) pirmoji komanda surinks 6 taškus;             | 6) antroji komanda surinks 6 taškus;             |
| 7) pirmoji komanda surinks mažiau kaip 2 taškus; | 8) antroji komanda surinks mažiau kaip 2 taškus; |
| 9) pirmoji komanda surinks 5 taškus;             | 10) antroji komanda surinks 5 taškus.            |

Kiekvienam iš šių 10 klausimų pateikiama po 7 atsakymus, iš kurių tik vienas yra teisingas. Vienas konkretus šio testo variantas su atitinkamais atsakymais pateiktas autorių darbe [5].

3. Kompiuteriu buvo sugeneruota 100 šio uždavinio lygiagrečiųjų variantų ir kiekvienas studentas sprendė savo individualų testo variantą. Buvo testuojami VGTU Statybos ir Elektronikos fakulteto antrojo kurso studentai. Lentelėje pažymėta:

BS – brandos egzamino 15-ojo uždavinio (mūsų bazinio uždavinio) sprendimo rezultatai Statybos fakultete;

BE – šio brandos egzamino uždavinio sprendimo rezultatai Elektronikos fakultete;

TS – testo (10 klausimų) sprendimo rezultatai Statybos fakultete;

TE – testo sprendimo rezultatai Elektronikos fakultete;

$n$  – testuojamų studentų skaičius.

1 lentelė

	<i>n</i>	0	1	2	3	4
BS	25	84	8	4	0	4
BE	109	40	36	16	2	6
TS	154	51	36	12	1	0
TE	105	5	43	30	16	6

Kadangi testas turėjo 10 klausimų, o bazinis uždavinys – tik 4, 1 lentelėje sugrupuoti testavimo rezultatai S ir E eilutėse: jei yra teisingai atsakyta į 0 arba 1 klausimą, rezultatai rašomi į 0 stulpelį; jei atsakyta į 2 arba 3 klausimus – į 1 stulpelį; jei atsakyta į 4 arba 5 klausimus – į 2 stulpelį; jei atsakyta į 6 arba 7 klausimus – į 3 stulpelį; 4 stulpelyje grupuojami atsakymai į 8, 9 arba į visus 10 klausimų. Visi rezultatai išreikšti procentais.

4. Taigi atlikti tyrimai rodo, kad pateiktas testas buvo sunkus ir Statybos, ir Elektronikos fakulteto studentams. Įdomu palyginti šiuos rezultatus su Nacionalinio egzaminų centro duomenimis: šį uždavinį pilnai išsprendė tik 3% laikusių 2002 metų matematikos valstybinį brandos egzaminą (13978 abiturientai), o visiškai nieko neišsprendė (gavo 0 taškų už šį uždavinį) 69% laikusių. Elektronikos fakulteto studentai rodo kiek geresnius rezultatus, sprendžiant testą (E).

Suformuluokime pagrindinius šio darbo rezultatus bei tolesnių tyrimų kryptis:

1. Suformuluoti aukštosios matematikos uždavinių išlygiagretinimo principai bei išnagrinėtas vienas išlygiagretinto testo pavyzdys;
2. Pateikti šiuo testu VGTU Statybos ir Elektronikos fakultetų studentų žinių tikrinimo rezultatai;
3. Šie rezultatai rodo, kad testas yra per sunkus dabartiniams VGTU studentams, kadangi ir vidurinėje, ir aukštojoje mokykloje tikimybių teorijos pradmenys įsisavinami nepakankamai;
4. Galima tikėtis, kad uždavinių išlygiagretinti variantai nėra blogesnis žinių vertinimo įrankis negu bazinis uždavinys;
5. Tokios išvados pagrindimui turi būti tikrinamos statistinės hipotezės ir siūlomas autorių straipsnis yra pirmas žingsnis šia kryptimi;
6. Kitu žingsniu turėtų būti parametru, pagal kuriuos bus lyginamas bazinis uždavinys ir jo lygiagretieji variantai, sistemos apibrėžimas ir šių parametru statistinis tyrimas;
7. Atkreipkime dėmesį, kad tarp tų parametru reikia išnagrinėti ir vidines koreliacijas tarp atskirų uždavinio klausimų;
8. Tolesniems uždavinių išlygiagretinimo principų tyrimams pageidautini lengvesni testai.

## Literatūra

- [1] A. Krylovas, Studentų mokyklinės matematikos žinių vertinimas, in: *LMD konf. darbai*, 146–149 (1997).
- [2] A. Krylovas, R. Vilkelis, Pirmo kurso studentų mokyklinės matematikos žinios, *Lietuvos mokslas ir pramonė, Matematika ir matematikos dėstymas – 2001*, Konferencijos pranešimų medžiaga, Kaunas (2001), pp. 30–34.
- [3] J. Raulynaitis, A. Krylovas, Matematikos pažymių koreliacinė analizė ir sesijos rezultatų prognozė, *Liet. matem. rink.*, **42** (spec.nr.), 438–443 (2002).
- [4] A. Krylovas, J. Raulynaitis, J. Jaurienė, Apie matematikos žinių įvairių vertinimų suderinamumą, *Liet. matem. rink.*, **42** (spec.nr.), 397–401 (2002).
- [5] A. Krylovas, J. Raulynaitis, Apie vieną tikimybių teorijos uždavinį, *Matematika ir matematikos dėstymas – 2003*, in: Konferencijos pranešimų medžiaga, Kauno technologijos universitetas (2003), pp. 16–20.

## The experience in parallelism of a probability theory task

A. Krylovas, J. Raulynaitis

The analysis of the parallel variants of a probability theory task are presented. The results of testing by Vilnius Gediminas Technical University second year students are proposed.