Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 142–146

Точные оценки коэффициентов Ньютона в классе однолистных функций

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Пусть E – единичный круг $|z| < 1$. Известно, что разделенную разность n-порядка можно определить формулой

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{F(\xi)\, \mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0) \ldots (\xi - z_n)}, \tag{1}$$

где Γ – простой замкнутый контур, охватывающий все точки $z_0, \ldots, z_n \in E$.

Точки $z_0, \ldots, z_n \in E$ могут совпадать между собой. Если $z_0 = \ldots = z_n = 0$, то разделенная разность (1) превращается в коэффициент Маклорена. Если $z_0 = \ldots = z_n = \xi$, то получим коэффициент Тейлора. В общем случае разделенную разность (1) можно назвать коэффициентом Ньютона.

Обозначим через $\tilde{K}_1(E)$ – класс аналитических в E функций $F(z)$, нормированных условиями, $F(0)=0$, $F'(0)=1$, для которых $[F(z); z_0, z_1] \neq 0$ при любых различных $z_0, z_1 \in E$. Легко видеть, что при таком определении класс $\tilde{K}_1(E)$ полностью совпадает с хорошо известным в математической литературе классом S однолистных и нормированных в E функций.

В 1984 году Л. де Бранжем [1] была положительно решена знаменитая гипотеза Л. Бибербаха о коэффициентах однолистных функций из класса S, которая в наших обозначениях формулируется следующим образом.

Теорема 1 (Л. де Бранж). *Если $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, то*

$$\frac{1}{n!} \left| F^{(n)}(0) \right| \leqslant n. \tag{2}$$

Знак равенства для любого $n \geqslant 2$ реализуется только Кебе функциями вида

$$F(z) = \frac{z}{(1 - e^{-i\alpha} z)^2} \in \tilde{K}_1(E), \; 0 \leqslant \alpha < 2\pi. \tag{3}$$

Применяя теорему 1, И.А. Александров [2] осуществил переход от точных оценок коэффициентов Маклорена (2) к точным оценкам коэффициентов Тейлора.

Теорема 2 (И.А. Александров). *Если* $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, *то*

$$\frac{1}{n!}\left|F^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n+|z|}{(1-|z|)^{n+2}}, \quad \forall z \in E, \ n = 0,1,2,\dots \tag{4}$$

Знак равенства для любого $n \geqslant 0$ *при фиксированном* $z_0 = |z_0|\, e^{i\alpha_0} \neq 0$ *из* E *реализуется только функциями вида* (3) *с* $\alpha = \alpha_0$.

Опираясь на теорему 2, автору этой заметки удалось перейти от точных оценок коэффициентов Тейлора к точным оценкам коэффициентов Ньютона.

Теорема 3 (Э.Г. Кирьяцкий). *Если* $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, *то*

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leqslant \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-|z_m|} \tag{5}$$

при любом $n \geqslant 0$ *и любых* $z_0, \dots, z_n \in E$. *Знак равенства в* (5) *имеет место тогда и только тогда, когда* $z_m = |z_m|\, e^{i\alpha_0}$, $m = 0,1,\dots,n$ *(т.е. все точки* $z_0, \dots, z_n$ *из* E *принадлежат лучу, выходящему из начала координат под некоторым углом* α_0 *к вещественной оси), и функция* $F(z)$ *имеет вид* (3) *при* $\alpha = \alpha_0$.

Заметим, что при $z_0 = \ldots = z_n = 0$ получим (2). При $z_0 = \ldots = z_n$ имеем (4). Таким образом, теорема 3 является в некотором смысле усилением, а также обобщением теорем Л. де Бранжа и И.А. Александрова.

Пусть S^0 – класс выпуклых однолистных в E нормированных функций $F(z)$. Для этого класса справедлива следующая

Теорема 4 (Э.Г. Кирьяцкий). *Если* $F(z) \in S^0$,

$$|[F(z); z_0, \dots, z_n]| \leqslant \frac{1}{(1-|z_0|)\dots(1-|z_n|)} \tag{6}$$

при любом $n \geqslant 1$ *и любых* $z_0, \dots, z_n \in E$. *Знак равенства в* (6) *имеет место тогда и только тогда, когда* $z_m = |z_m|\, e^{i\alpha_0}$, $m = 0,1,\dots,n$ *(т.е. все точки* $z_0, \dots, z_n$ *из* E *принадлежат лучу, выходящему из начала координат под некоторым углом* α_0 *к вещественной оси), и функция* $F(z)$ *имеет вид*

$$F(z) = \frac{z}{1-e^{-i\alpha_0}z}.$$

Заметим, что при $z_0 = \ldots = z_n$ получим результат И.А. Александрова [2]. Нам понадобится так называемая теорема перехода, имеющая самостоятельный интерес и применения, например, в том случае, когда уже известна оценка модуля n-ой производной аналитической в единичном круге E функции [3].

Теорема 5 (Э.Г. Кирьяцкий). *Пусть $F(z)$ – аналитическая в E функция и $M(r)$ – непрерывная на промежутке $[0,1)$ функция, имеющая на этом промежутке строго возрастающую непрерывную n-ую производную $M^{(n)}(r)$. Если*

$$\left|F^{(n)}(z)\right| \leqslant M^{(n)}(r), \ |z| = r, \tag{7}$$

для любого $z \in E$, то справедливыследующие утверждения:

1. *При любых $z_0, \ldots, z_n \in E$ выполняется неравенство*

$$|[F(z); z_0, \ldots, z_n]| \leqslant [M(r) : r_0, \ldots, r_n], \tag{8}$$

где $|z_0| = r_0, \ldots, |z_n| = r_n$.

2. *Пусть $F^{(n)}(z) \not\equiv \text{const}$. Для того чтобы при некоторых $z_0, \ldots, z_n \in E$ (среди которых есть различные) в (8) имело место равенство*

$$|[F(z); z_0, \ldots, z_n]| = [M(r) : r_0, \ldots, r_n], \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные α и β, удовлетворяющие следующим условиям:

a) *все точки $z_0, \ldots, z_n$ лежат на радиусе круга E, наклоненном под углом α к вещественной оси, т.е. $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, \ldots, n$.*

b) *выполняется условие*

$$F^{(n)}\left(re^{i\alpha}\right) = M^{(n)}(r)\, e^{i\beta}$$

для любого r, взятого из наименьшего промежутка, содержащего все точки $r_0, \ldots, r_n$.

c) *Пусть $F^{(n)}(z) \equiv c$. Для того чтобы для некоторых $z_0, \ldots, z_n \in E$ имело место равенство (9), необходимо и достаточно, чтобы*

$$M^{(n)}(r) \equiv |c|$$

при любом r, взятом из наименьшего промежутка, содержащего все точки $r_0, \ldots, r_n$ [3].

Докажем теорему 3. Сначала убеждаемся в том, что для функции

$$M(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$$

справедливо равенство

$$\frac{1}{n!} M^{(n)}(r) = \frac{r+n}{(1-r)^{2+n}},$$

где $M^{(n)}(r)$ – непрерывная и строго возрастающая на промежутке $[0,1)$ функция. Применяя теорему 2, к функции $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$, получим

$$\left|F^{(n)}(z)\right| \leqslant M^{(n)}(r), \quad \forall |z| = r < 1.$$

На основании теоремы 5 и того, что

$$[M(r); r_0, \ldots, r_n] = \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m},$$

приходим к оценке (5) разделенной разности n-го порядка любой функции $F(z) \in \tilde{K}_1(E)$:

$$\begin{aligned} |[F(z); z_0, \ldots, z_n]| &\leqslant [M(r); r_0, \ldots, r_n] \\ &= \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}, \end{aligned} \tag{10}$$

при любом $n \geqslant 0$ и произвольно взятых $z_0, \ldots, z_n \in E$, так как случай совпадения всех точек между собой приведет нас снова к теореме 2. Теперь рассмотрим вопрос о знаке равенства в (10). Пусть знак равенства в (10) имеет место в некоторых точках $z_0, \ldots, z_n \in E$, среди которых есть различные. Тогда на основании теоремы 5 существуют такие вещественные α и β, что $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m = 0, 1, \ldots, n$ и

$$F^{(n)}\left(re^{i\alpha}\right) = M^{(n)}(r)\, e^{i\beta} = n! \frac{r+n}{(1-r)^{2+n}} e^{i\beta},$$

при любом r из наименьшего промежутка, содержавшего все точки $r_0, \ldots, r_n$. По теореме 2 функция $F(z)$ должна иметь вид (3) с $\alpha = \alpha_0$. Для n-ой разделенной разности такой функции легко получим

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = e^{-i(n-1)\alpha} \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1 - e^{-i\alpha} z_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1 - e^{-i\alpha} z_m}.$$

Теорема 3 доказана. Аналогичным образом доказывается теорема 4, если применить формулу

$$\left[z(1-cz)^{-1}; z_0, \ldots, z_n\right] = \frac{c^{n-1}}{(1-cz_0)\ldots(1-cz)}.$$

Литература

[1] L. Branges, *A Proof of the Bieberbach Conjecture*, LOMI preprintes, E-5-84-S, 1–21.

[2] И.А. Александров, *Методы геометрической теории аналитических функций*, Томский государственный университет, Томск (2001.

[3] Э.Г. Кирьяцкий, Некоторые оценки n-ой разделенной разности, *Лит. мат. сборник*, **29**(3), 491–506 (1989).

Tikslūs įvertinimai Njutono koeficientų vienalapių funkcijų klasėje

E.G. Kirjackis

I.A. Aleksandrovas nustatė tikslius įvertinimus Teiloro koeficientų vienalapių normuotų funkcijų vienetiniame skritulyje. Remiantis I.A. Aleksandrovo gautais rezultatais, šiame straipsnyje gauti šių funkcijų Njutono koeficientų tikslūs įvertinimai. Lygybės ženklai šiuose įverčiuose realizuojami Kebe funkcija.