Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 802–803

Fundamentalioji J.Hájek lema imtims iš baigtinės vektorių visumos

Algimantas BIKELIS, Jurgita TURKUVIENĖ (VU)
el. paštas: marius@post.omnitel.lt, jurgutet@takas.lt

Nagrinėjame seriją nepriklausomų k-mačių vektorių

$$\begin{aligned} &\vec{\xi}_{11}, \vec{\xi}_{12}, \ldots, \vec{\xi}_{1N_1},\\ &\vec{\xi}_{21}, \vec{\xi}_{22}, \ldots, \vec{\xi}_{2N_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\vec{\xi}_{\nu 1}, \vec{\xi}_{\nu 2}, \ldots, \vec{\xi}_{\nu N_\nu}. \end{aligned} \tag{1}$$

Tarkime, kad $\nu \to \infty$ ir $N_\nu \to \infty$, ir vektoriai pilnai charakterizuoja baigtinę mus dominančią objektų visumą

$$O_{\nu 1}, O_{\nu 2}, \ldots, O_{\nu N_\nu}. \tag{2}$$

Tarkime, kad atsitiktinis vektorius $\vec{\xi}_{\nu j}$ turi absoliučiai tolydinį skirstinį $F_{\nu j}(\vec{x})$, $\vec{x} \in R^k$, Lebego mato ar taškinio mato Euklido erdevėje R^k atžvilgiu. Taip pat tiriamas atvejis, kai μ yra taškinio ir Lebego matų, atitinkamai erdvėse R^{k_1} ir R^{k_2} ($R^k = R^{k_1} \times R^{k_2}$), sandauga.

Tūrio n_ν imčių iš (2) yra labai daug. Mes apsiribosime trimis: π_1 – imtis su elementų grąžinimu į baigtinę visumą (2); π_2 – imtis be grąžinimo (paprastoji atsitiktinė n_ν tūrio imtis); π_3 – Puasono imtis (imties tūris λ yra atsiktinis dydis [1]). Imtis pažymėkime taip:

$$\begin{aligned} &\pi_1 - \vec{\xi}_{\nu i_1}, \vec{\xi}_{\nu i_2}, \ldots, \vec{\xi}_{\nu i_{n_\nu}};\\ &\pi_2 - \vec{\xi}_{\nu i_1}, \vec{\xi}_{\nu i_2}, \ldots, \vec{\xi}_{\nu i_{n_\nu}}, \quad 1 \leqslant i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{n_\nu} \leqslant N_\nu;\\ &\pi_3 - \vec{\xi}_{\nu i_1}, \vec{\xi}_{\nu i_2}, \ldots, \vec{\xi}_{\nu i_\lambda}, \quad i_1 \neq \ldots \neq i_\lambda. \end{aligned}$$

Darbe nagrinėjami trijų sumų

$$\vec{S}^{(j)}_{n_\nu} = \vec{\xi}_{\nu i_1} + \ldots + \vec{\xi}_{\nu i_{n_\nu}},$$

kai $j = 1, 2$, t.y. imčių π_1 ir π_2, ir

$$\vec{S}^{(3)}_{\lambda} = \vec{\xi}_{\nu i_1} + \ldots + \vec{\xi}_{\nu i_\lambda}$$

tikimybiniai skirstiniai.

Atitinkamos šių statistikų charakteringosios funkcijos yra

$$Me^{i(\vec{t},\vec{S}^{(1)}_{n_\nu})} = \left(\frac{1}{N_\nu}\sum_{j=1}^{N_\nu} f_{\nu j}(\vec{t})\right)^{n_\nu},$$

$$Me^{i(\vec{t},\vec{S}^{(2)}_{n_\nu})} = \frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n_\nu}\prod_{j=1}^{N_\nu}\left(q + pe^{i\theta} f_{\nu j}(\vec{t})\right) d\theta,$$

$$Me^{i(\vec{t},\vec{S}^{(3)}_{\lambda})} = \prod_{j=1}^{N_\nu}\left(q + pf_{\nu j}(\vec{t})\right),$$

čia $p = \frac{n_\nu}{N_\nu}$, $P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}$, $f_{\nu j}(\vec{t})$ – atsitiktinio vektoriaus $\vec{\xi}_{\nu j}$ charakteringoji funkcija, $\vec{t} \in R^k$.

1 LEMA. *Tarkime, kad $\vec{\xi}_{\nu 1}, \vec{\xi}_{\nu 2}, \ldots, \vec{\xi}_{\nu N_\nu}$ turi baigtinius antros eilės momentus ir neišsigimusias kovariacijų matricas, tuomet*

$$\frac{D(\vec{S}^{(2)}_{n_\nu} - \vec{S}^{(3)}_{\lambda}, \vec{t})}{D(\vec{S}^{(3)}_{\lambda}, \vec{t})} \leqslant \sqrt{\frac{1}{n_\nu} + \frac{1}{N_\nu - n_\nu}},$$

čia $(\vec{a}, \vec{t})$ – skaliarinė vektorių $\vec{a}, \vec{t} \in R^k$ sandauga. $D(\ldots)$ – skliaustuose nurodyto atsitiktinio dydžio dispersija.

Lema apibendrina žinomą J. Hájek [1] lemą. Iš jos išplaukia toks tvirtinimas.

1 TEOREMA. *Tarkime, kad išpildytos lemos sąlygos ir $n_\nu \to \infty$ bei $N_\nu - n_\nu \to \infty$, kai $\nu \to \infty$. Tuomet*

$$\sup_{\vec{x}}\left|P\{\vec{S}^{(2)}_n < \vec{x}\} - P\{\vec{S}^{(3)}_\mu < \vec{x}\}\right| \to 0.$$

Teoremos analogas yra knygoje [2].

Literatūra

1. J. Hájek, Limiting distributions in simple random sampling for a finite population, *Magyar Tud Akad Mat Kutato Int Korl*, **5**, 361–374 (1960).
2. Ю. Беляев, *Вероятностные методы выборочного контроля*, Наука, М. (1975).

SUMMARY

A. Bikelis, J. Turkuvienė. Fundamental J. Hájek lema for samples from finite population of vectors

Paper deals with j. Hájek's lema for samples from finite population of vectors.

Keywords: series of independent random vectors, Hájek lema, simple random sample, Poisson sample.