Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 363–368

Vieno kompiuterinės geometrijos uždavinio variacijos

Jūratė SKŪPIENĖ (MII)
el. paštas: jurate@ktl.mii.lt

Reziumė. Sukurti gerą uždavinį informatikos olimpiadoms ar kitiems konkursams nėra lengva. Uždavinys turi tenkinti daug reikalavimų. Straipsnyje bandoma parodyti koks gali būti uždavinio kelias nuo pirminės idėjos iki tinkamai suformuluoto uždavinio, kokiais etapais kuriamas uždavinys. Kaip pavyzdys nagrinėjamas kompiuterinės geometrijos uždavinys, kuris 2004 m. buvo pateiktas Baltijos šalių informatikos olimpiadoje Latvijoje.

Raktiniai žodžiai: informatikos mokymas, algoritmavimas, algoritmavimo metodai, informatikos olimpiados, kompiuterinė geometrija.

1. Įvadas

Kasmet vyksta daug nacionalinių, regioninių, tarptautinių informatikos olimpiadų, įvairių algoritmavimo konkursų. Kiekvienam jų reikia paruošti po kelis uždavinius. Uždaviniams keliama įvairių reikalavimų. Kaip pavyzdį galima paimti Pasaulines informatikos olimpiadas (IOI) [2]. Uždavinių tematikai keliami reikalavimai įrašyti IOI organizavimo gairėse [3]:

- užduotys turi būti algoritminio pobūdžio;
- užduoties tikslas – sukurti teisingą ir efektyvų algoritmą;
- duomenų įvedimas bei išvedimas privalo būti kiek galima paprastesni;
- užduotys turi būti tinkamos automatiniam vertinimui.

Keliami ir papildomi reikalavimai [3]: (a) užduotys turi būti nežinomos potencialiems IOI dalyviams; (b) užduotys negali būti naudotos jokiose analogiškose varžybose; (c) turi užtekti varžyboms skirto laiko išspręsti šioms užduotims; (d) užduotys turi būti nedviprasmiškos ir lengvai suprantamos; (e) užduotys turi būti neutralios kultūriniu požiūriu; (f) užduotys turi būti naujoviškos.

2. Uždavinio kūrimas prasideda nuo idėjos

Uždavinio kūrimas prasideda nuo pirminės idėjos, pvz., *patikrinti, ar egzistuoja kelias tarp dviejų grafo viršūnių*. Toliau idėja tikslinama, pvz., parenkamas grafo dydis, nusprendžiama, ar grafas yra orientuotas ir pan. Šie patikslinimai turi *esminės* įtakos uždavinio sprendimui. Patikslinus ir patobulinus idėją formuluojama sąlyga, (pvz., *patikrinti, ar galima nukeliauti iš vieno miesto į kitą*), aprašomas duomenų formatas, sugalvojami pavyzdžiai ir t.t. Sąlygos tobulinimas neturi įtakos uždavinio sprendimo būdui, tačiau formuluojant sąlygą o ypač rengiant sprendimą kartais atrandama probleminių vietų ir vėl tenka tikslinti uždavinio idėją.

2.1. Pirmasis variantas: apskritimai

Vienais metais Lietuvos moksleivių informatikos olimpiadai buvo pasiūlytas toks uždavinys:

Užduotis. Stačiakampiame popieriaus lape nubrėžta daug apskritimų. Jeigu iš lapo viršutinio kampo nubrėšime tiesės atkarpą iki kito lapo krašto, tai ji kirs (arba tik lies) keletą apskritimų. Reikia surasti atkarpos, kuri kirstų (ir liestų) daugiausiai apskritimų, antrojo galo koordinates. Jeigu yra keli vienodi sprendiniai, tai pateikti vieną jų.

Ribojimai. $0 \leqslant Pl, Au \leqslant 30$, $N \leqslant 100$, čia Pl – lapo plotis, Au – aukštis, N – apskritimų skaičius. Duomenys pateikiami ir skaičiavimai atliekami milimetrų tikslumu.

Galimas sprendimo variantas (1 pav.): imti kiekvieną lapo krašto tašką (milimetro tikslumu) ir kiekvienam taškui suskaičiuoti, kiek apskritimų kerta atkarpa, nubrėžta iš lapo viršutiniojo kampo. Tai atliekama imant visus apskritimus paeiliui ir tikrinant ar juos kerta atkarpa. Algoritmas nesudėtingas: perrinkimas, kurį galima užrašyti dviem ciklais.

Kita sprendimo dalis: kaip nustatyti, ar atkarpa kerta apskritimą. Remiantis tiesės lygtimi, išvedama kvadratinė lygtis:

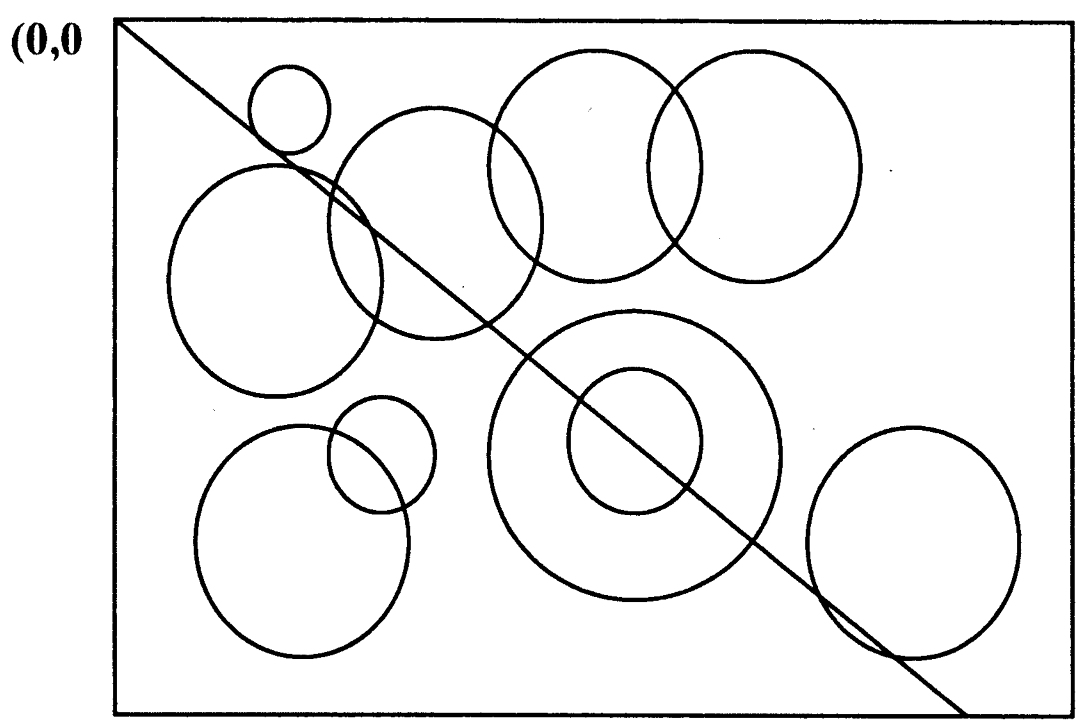
$$\left(\frac{xb^2}{yb^2}+1\right)\cdot t^2-\left(\frac{2\cdot xb\cdot xc}{yb}+2\cdot yc\right)\cdot t+\left(xc^2+yc^2-r^2\right)=0.$$

Laikoma, kad tiesę nusako du atkarpos taškai $A(xa, ya)$ ir $B(xb, yb)$, o apskritimo centras yra taške $C(xc, yc)$. Toliau spręsdami šią lygį galime nustatyti, ar atkarpa kerta (liečia) apskritimą.

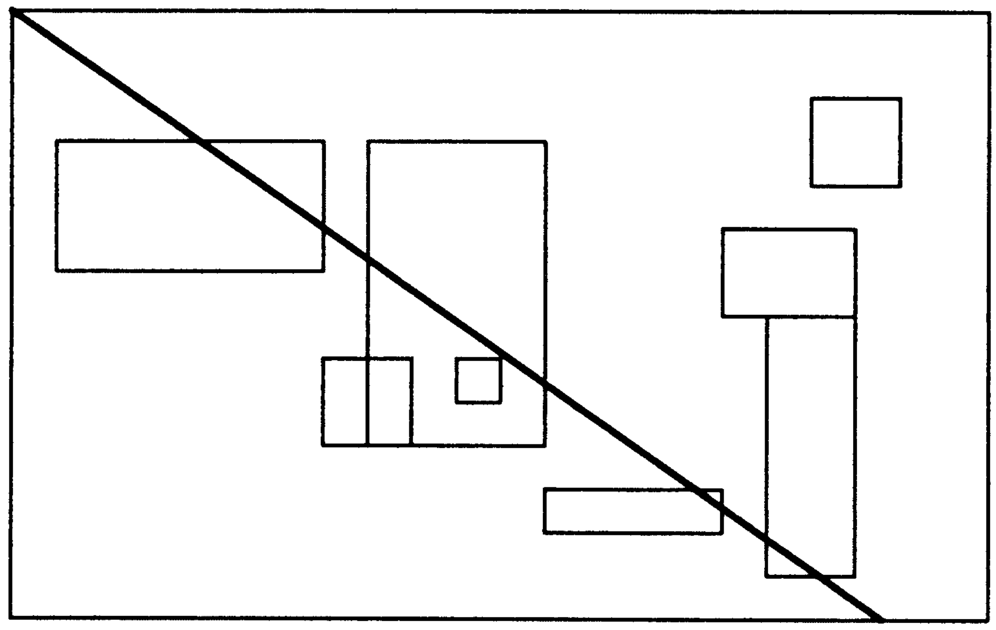
Matome, kad dalyviai dėmesį koncentruos ne į efektyvų algoritmą, o į lygčių sprendimą ant popieriaus.

2.2. Antrasis variantas: stačiakampiai

Norint supaprastinti matematinę dalį buvo pakeista uždavinio sąlyga: vietoj apskritimų braižomi stačiakampiai (2 pav.).



1 pav. Apskritimus kertančios atkarpos pavyzdys.



2 pav. Stačiakampius kertančios atkarpos pavyzdys.

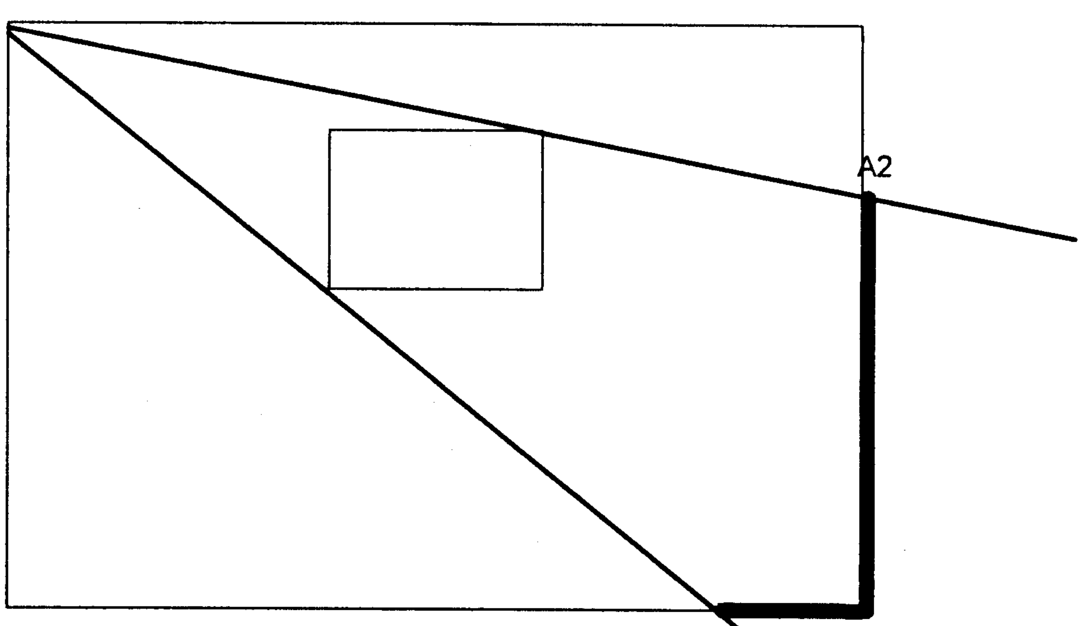
Norint nustatyti, ar atkarpa keičia stačiakampį reikia nustatyti, ar atkarpa kerta vieną iš dviejų stačiakampio kraštinių, t.y., ar kertasi dvi atkarpos. Sakykime, pirmąją atkarpą nusako du jos galai $A(xa, ya)$ ir $B(xb, yb)$, antrąją – $C(xc, yc)$ ir $D(xd, yd)$. Jei reiškinių $(xc - xa)(yb - ya) - (xb - xa)(yd - ya)$ ir $(xd - xa)(yb - ya) - (xb - xa)(yd - ya)$ ženklai skiriasi, tuomet atkarpos kertasi, jei sutampa – nesikerta. Atskirai nagrinėjami atvejai, kai reiškinių reikšmė lygi 0.

Šias formules galima rasti daugelyje algoritmų vadovėlių, kuriuose yra kompiuterinės geometrijos skyrius [1]. Gavome nesudėtingą kompiuterinės geometrijos uždavinuką, kurio algoritmas labai paprastas, tačiau jis reikalauja minimalių kompiuterinės geometrijos žinių.

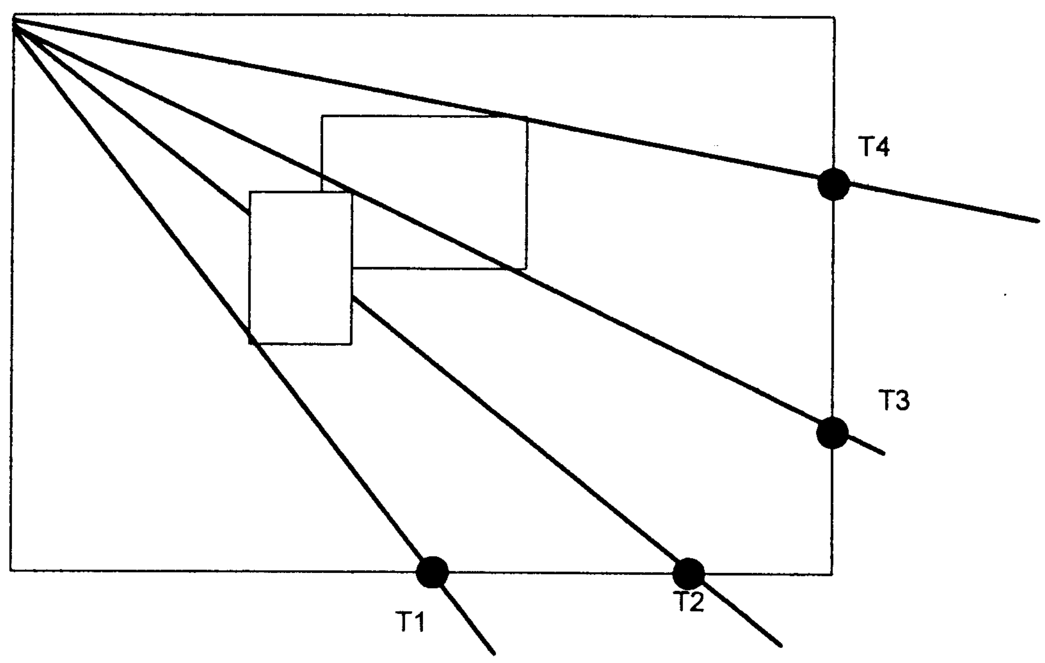
2.3. Trečiasis variantas: intervalų metodas

Uždavinys liko nepanaudotas Lietuvos informatikos olimpiadoje. Reikėjo sunkesnio uždavinio Baltijos šalių olimpiadai.

Uždavinys turi ir antrą sprendimo būdą: *intervalų metodą* (3 pav.). Iš lapo viršutinio kampo brėžiame po dvi liestines kiekvienam stačiakampiui ir gauname du taškus $A1$



3 pav. Visos atkarpos, prasidedančios kairiajame viršutiniame kampe ir kertančios didįjį stačiakampį tarp taškų A1 ir A2, kirs ir mažąjį stačiakampį.



4 pav. Intervalų metodo iliustracija.

ir $A2$, kuriuose kertamas lapo kraštas. Akivaizdu, kad šis stačiakampis bus kertamas visuose taškuose, esančiuose tarp taškų $A1$ ir $A2$.

Dar daugiau: vienas ieškomų sprendinių (jų gali būti daug) visuomet bus taške, kuriame iš lapo viršutiniojo kampo nubrėžta stačiakampio liestinė kerta lapo kraštą (4 pav.).

Taigi, reikia rasti visus tokius taškus, suskaičiuoti kiek stačiakampių kertama kiekviename nagrinėjamame taške ir išrinkti tašką su didžiausiu stačiakampių skaičiumi.

Kadangi, skaičiuojama milimetro tikslumu (t.y., sveikaisiais skaičiais), o taško, kuriame liestinė kerta lapo karštą koordinatės gali būti realieji skaičiai, tai apskaičiuojant taškų koordinates, jos patikslinamos: imamas artimiausias į kairę ar į dešinę taškas su sveikomis koordinatėmis.

Pasunkėjo geometrinė dalis. Reikia rasti tašką, kuriame stačiakampio liestinė kerta lapo kraštą. Stačiakampio liestinės, einančios per taškus $A(xa, ya)$ ir $B(xb, yb)$ bei tiesės $y = yc$ (t.y., apatinį lapo kraštą), susikirtimo taškas yra $D(xd, yd)$ ir jo koordinatės lygios:

$$xd = \frac{yc - ya}{yb - ya} \times (xb - xa) + xa; \qquad yd = yc$$

Palyginkime dviejų aptartų algoritmų efektyvumą. Pirmojo algoritmo eilė yra $\mathrm{O}(Pl \times Au \times N)$. Nes sprendinys ieškomas tikrinant kiekvieną galimo taško (lapo krašte) ir stačiakampio porą. Nagrinėjamų taškų skaičius lygus $Pl \times Au$. Antrojo algoritmo eilė lygi $\mathrm{O}(2 \times N)$. Analizuojamų taškų skaičius neviršija dvigubo stačiakampių skaičiaus. Esant tokiems nedideliems ribojimams, kokie pateikti sąlygoje, automatiškai testuojant neįmanoma įvertinti algoritmo efektyvumo. Ir vienu ir kitu atveju programa veiks pakankamai greitai. Vienintelė išeitis norint diferencijuoti skirtingo efektyvumo sprendimus – didinti ribojimus.

Ribojimai padidinami: $0 < Pl, Au \leqslant 10^9$, $1 \leqslant N \leqslant 10000$. Ribojimas 10^9 parinktas maksimalus leistinas toks, kad atliekant reikalingus veiksmus (pvz., dauginant du tokius skaičius) būtų galima naudoti įprastus duomenų tipus (šiuo atveju $int64$).

2.4. Ketvirtasis variantas: intervalų metodas ir didelių skaičių modeliavimas

Uždavinį galima pasunkinti vėl didinant ribojimus. Padidinus lapo kraštinės ilgio ribojimus iki, pvz., 10^{10}, jau nebepavyktų išsiversti su standartiniais sveikųjų skaičių duomenų tipais. Tektų modeliuoti veiksmus su dideliais skaičiais: šių skaičių sudėtį, daugybą, dalybą. Algoritmai taptų lėtesni, o jų tekstas pailgėtų. Įvertinus visus aspektus 2004 metų Baltijos olimpiadai buvo parinktas trečiasis variantas.

3. Sąlygos formulavimas ir tikslinimas

Apsisprendus dėl algoritminės uždavinio dalies, tobulinama uždavinio sąlygos formuluotė. Tikslinat sąlygą stengiamasi:

- įvertinti, ar tinkamas uždavinio apvalkalas (jei reikia jis keičiamas);
- suvienodinti sąlygos formuluotę su toje olimpiadoje vartojamu standartu;
- patikslinti ir sukonkretinti duomenų ribojimus;
- įvertinti, ar formuluotėje nėra kas nors nutylėta arba dviprasmiškai pasakyta, kas visiškai aišku uždavinio rengėjams, tačiau gali būti nesuprantama dalyviams;
- patobulinti sąlygą kalbiniu požiūriu;
- patobulinti sąlygą kitais aspektais (jei tai įmanoma).

Panagrinėkime, ką galima patobulinti šiame uždavinyje:

✓ Kadangi prašoma surasti taškų (sprendinių) skaičių, bei nors vieno sprendinio koordinates, reikia konkrečiau nuakyti kas tai yra taško koordinatė, kokia koordinačių ašių kryptis ir pan. Naujoje formuluotėje stačiakampiai pateikiami nubrėžti ne lape, o koordinačių plokštumoje.

✓ Aiškiai įvardijama, kad stačiakampių kampus nusakančios koordinatės yra sveikieji skaičiai iš nurodyto intervalo.

✓ Koordinačių plokštumoje atkarpą patogiau brėžti tik viršutiniame dešiniajame koordinačių plokštumos ketvirtyje (t.y., visos koordinatės yra neneigiamos) ir brėžti iš koordinačių pradžios taško.

✓ Sąlygoje ir brėžinyje atkarpa nusakoma dviem taškais A ir B.

✓ Nurodymas *skaičiuoti milimetro tikslumu* gali būti dviprasmiškas,todėl naujoje formuluotėje apie tikslumą nekalbama ir aiškiai nurodoma kokias sąlygas turi tenkinti ieškomasis taškas B.

✓ Patikslinant ribojimus nurodyta, kad Pl ir Au yra didesni (o ne neviršija) už 0.

✓ Sukurtas pavyzdys, padedantis suprasti duomenų bei rezultatų pateikimą.

Galutinę uždavinio formuluotę galima rasti [4].

4. Kiti uždavinio rengimo etapai

Straipsnis skirtas įvairiems uždavinio sąlygos rengimo aspektams, todėl tolesnius uždavinio rengimo etapus tik paminėsime. Suformulavus sąlygą parengiami keli uždavinio sprendimai (programos). Kiekvienam žinomam šio uždavinio algoritmui parengiama bent po vieną sprendimą.

Kadangi uždavinio vertinimas yra automatizuotas, parengiami testai. Jie turėtų padėti atskirti efektyvius algoritmus nuo neefektyvių, įvertinti ar sprendimai įvairius ribinius. Rengiant testus dažnai tenka parašyti ir testų generavimo bei testų teisingumo tikrinimo programą. Šiuo atveju testų generavimo programa yra būtina (sugeneruoti, pvz., 10000 stačiakampių.

Vertinimui būtina parašyti dvi programas. Pirmoji programa tikrintų rezultatų formatą, t.y., ar pateikti tikrai trys skaičiai, ar jie įrašyti vienoje eilutėje ir ar tie skaičiai tenkina ribojimus: pirmasis (kertamų apskritimų sk.) skaičius turi būti intervale nuo 0 iki N, o kiti du skaičiai turi būti koordinatės iš sąlygoje nurodyto intervalo. Antroji programa turėtų tikrinti rezultatų teisingumą: patikrinti, ar kertamų apskritimų skaičius yra tikrai didžiausias ir ar ta atkarpa tikrai kerta tiek apskritimų.

Vykdant bet kurį šių etapų gali tekti grįžti tobulinti sąlygos formuluotę ar net pačią idėją.

5. Išvados

Rimto uždavinio parengimas informatikos olimpiadai yra ilgas ir sudėtingas procesas, kuriame dažnai dalyvauja ne vienas rengėjas. Norint gerai parengti uždavinį svarbu ne tik dalykinės (algoritmavimo bei programavimo) žinios, bet ir dalyvavimo olimpiadose bei uždavinių rengimo patirtis. Kitu atveju uždavinio rengėjui labai sunku įvertinti įvairius uždavinio aspektus.

To paties uždavinio variacijos gali būti labai įvairios ir skirtingo sudėtingumo. Todėl uždavinių sudėtingumas bei tinkamumas olimpiadoms turėtų būti vertinamas atsižvelgiant ne tik į turimą formuluotę (sprendimą), bet ir į galimas kitokias uždavinio variacijas.

Ribojimai dažnai yra vienas svarbiausių veiksnių, nulemiančių algoritmą bei uždavinio sudėtingumą. Pastaruoju metu olimpiadose yra tendencija yra didinti ribojimus ir tokiu būdu gana paprastus uždavinius paversti sudėtingais. Todėl kuriant uždavinį ar jį analizuojant ribojimams turi būti teikiama ypatinga svarba.

Literatūra

1. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, The MIT press (1992).
2. Official IOI web page, maintained by IOI secretariat.
   `http://olympiads.win.tue.nl/ioi/`
3. Official IOI regulations.
   `http://olympiads.win.tue.nl/ioi/rules/index.html`
4. Tasks section of the official BOI'2004 web page.
   `http://www.boi2004.lv/`

SUMMARY

J. Skūpienė. Variations of one computational geometry problem

It is not an easy task to create a challenging problem for the Olympiads in Informatics. The problem should satisfy many requirements. The paper tries to reveal possible stages of development which lead from the original idea to the final formulation of the problem. The computational geometry task *Rectangles*, used in Baltic Olympiad in Informatics'2004 is taken as an example.

Keywords: teaching of informatics, algoritmization, algoritmization methods, informatics olympiads, compiutational geometry.