

Mobilios žemės ūkio technikos mechaninio valdymo įtaisų virpėjimo proceso matematinis modeliavimas

Algimantas BARTAŠEVIČIUS, Petras ILGAKOJIS,
Stanislovas MERKEVIČIUS (LŽŪU)

el. paštas: ma@nora.lzua.lt, sauga@tech.lzuu.lt, petilg@info.lzua.lt

Reizumė. Straipsnyje analizuojami cilindrinų vamzdžių ir iš jų sudarytų stačiakampių rėmų skersiniai virpėjimai ir jų dažnių skaičiavimo metodika. Šių virpėjimų matematiniam modeliui sudaryti naudojama momentinė cilindrinų vamzdžių teorija ir tamprumo teorijos pagrindinės lygtys. Išnagrinėti vienasluoksnių ir dvisluoksnių storasienių ir plonasienių vamzdžių skersiniai virpėjimai, sudarytos diferencialinės dalinėmis išvestinėmis lygtys virpėjimams aprašyti. Panaudojus šioms lygtims apytikslų sprendimo metodą yra gautos paprastos ir praktiškos išraiškos savųjų virpėjimų dažniams skaičiuoti. Yra palygintos vienasluoksnių ir dvisluoksnių vamzdžių ir iš jų sudarytų stačiakampių rėmų savųjų skersinių virpėjimų dažnių reikšmės.

Įvadas

Daugelio žemės ūkyje naudojamų mašinų (įrengimų, traktorių, savaeigių važiuoklių, mechanizmų ir kitų darbo priemonių) operatorių vibracijų rizika yra nepriimtina. Jų sukeliama rizika darbuotojų saugai ir sveikatai nagrinėta [1, 2, 3]. Konstatuojamas jauno amžiaus asmenų darbo aplinkos pablogėjimas dėl įrengimų vibracijos ir kitų veiksnių. Remiantis statistiniais duomenimis 1978–2003m. 65–80% minėtų operatorių profesinių ligų sudarė vibracinė ir klausos ligos. Todėl vibracijų rizika yra nepriimtino dydžio ir ją būtina mažinti techninėmis priemonėmis. Sistemoje “žmogus (mašinos operatorius) – mašina” vertinama ir tiriama rankas ir visą kūną veikianti vibracija. Dėl mechaninės energijos poveikio žmogaus organizme vyksta fizinių-cheminių procesų pokyčiai, kurių pobūdis priklauso nuo veikiančios vibracijos amplitudės dažnio charakteristikų, žmogaus kūno dalių slopinamųjų savybių, tamprio ir masės, kurios gali būti vertinamos mechaniniu impedansu (kompleksine mechanine varža).

Pradiniam mašinos kūrimo procese yra didelės techninės galimybės keisti jos valdymo įtaisų ir konstrukcinių elementų savųjų virpėjimų dažnius. Tam reikalui yra naudojami matematiniai mechaninių sistemų virpėjimo proceso modeliai. Tirtas mašinų mechaninio valdymo įtaisuose panaudojamų storasienių ir plonasienių vienasienių ir dvisienių (dvisluoksnių) cilindrinų vamzdžių ir iš jų sudarytų rėmų virpėjimo procesas ir, remiantis tamprumo teorija, sudarytas matematinis modelis. Skaičiavimus galima atlikti ir kintamo skerspjūvio cilindrinų vamzdžių konstrukcijoms, vairo mechanizmams ir kt.

Šie klausimai iš dalies yra nagrinėti [4–10].

Tyrimų metodika ir rezultatai

Remiantis tamprumo teorija virpančiam kūnui kiekviename jo taške $M(x, y, z)$ galima skaičiuoti poslinkius u, v ir w pagal Lamė lygtis [4]:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 v + Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 w + Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases}$$

kur $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ yra Laplaso operatorius, $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ yra tūrinė deformacija, $\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu}$ – Lamė koeficientas, ρ yra kūno tankis, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – šlyties modulis.

Šią Lamė diferencialinių lygčių sistemą spręsti yra pakankamai sunku. Todėl naudosome kitą būdą.

1. *Skersiniai storasienio cilindrinio kevalo (vamzdžio) virpėjimai.* Storasienių cilindrinų vamzdžių virpėjimai yra nagrinėti [8]. Cilindrinį storasienį vamzdį keičiame strypu, kurių standumai lenkimui yra vienodi, t.y. $EI_{\text{strypo}} = EI_{\text{vamzdžio}}$ ($EI\alpha = M_{i\bar{s}}$). Storasienio cilindro skersiniams įlinkiams skaičiuoti panaudojame strypo diferencialinę svyravimo lygtį:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

čia $a = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$; E – tamprumo modelis; I – skerspjūvio inercijos momentas; ρ – medžiagos tankis; S – skerspjūvio plotas; u – vamzdžio įlinkis.

Pažymėkime strypo spindulį r , storasienio vamzdžio storį h , vidinį spindulį $R_2 = R - \frac{h}{2}$, išorinį spindulį $R_1 = R + \frac{h}{2}$. Čia R – vamzdžio vidurinio sluoksnio spindulys.

Kadangi $I_{\text{strypo}} = \frac{\pi r^4}{4}$, o $I_{\text{vamzdžio}} = \frac{\pi R_1^4}{4} - \frac{\pi R_2^4}{4}$, tai $r^4 = R_1^4 - R_2^4 = (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2) = (R_1 - R_2)(R_1 + R_2)(2R^2 + \frac{h^2}{2}) = h \cdot 2R \cdot (2R^2 + \frac{h^2}{2})$ ir

$$r = \sqrt[4]{2Rh(2R^2 + \frac{h^2}{2})}, \quad a = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Nagrinėsime atvejį, kai vienas l ilgio vamzdžio galas įtvirtintas standžiai, o kitas – laisvas. Tada (1) lygtiai spręsti turime tokias kraštines sąlygas:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Jei laisvojo vamzdžio galo neveikia jokios papildomos jėgos, tai lenkimo momentas $M_1(l) = 0$ ir skersinė jėga $Q(l) = 0$, t.y. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=l} = 0$ ir $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|_{x=l} = 0$, nes $Q(x) = \frac{\partial M_1}{\partial x}$.

Tačiau kada žmogus rankomis stumia ir valdo rankenomis savaeigę mažagabaritinę techniką arba kitus jos valdymo įtaisus, tai stačiakampio cilindrinio rėmo (valdymo rankenų) gale $Q(l) \neq 0$, nes $Q(x) \approx P \frac{\partial u}{\partial x}$. Čia P yra išilgai rankenų nukreipta žmogaus rankų jėga. Kadangi lenkiamam vamzdžiui $EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = M_1$, $Q = \frac{\partial M_1}{\partial x}$ tai

$P \frac{\partial u}{\partial x} |_{x=l} = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} |_{x=l}$, tai $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} |_{x=l} \neq 0$, nes $\frac{\partial u}{\partial x} |_{x=l} \neq 0$. Laisvajame vamzdžio gale $M_1(l)$ yra mažas ir $M_1(l) \approx 0$, t.y. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} |_{x=l} = 0$.

(1) lygtis su (2) kraštinėmis sąlygomis yra spręsta apytiksliu Bubnovo–Galiorkino metodu ir gauta tokia savųjų svyravimų dažnių reikšmė $\min \omega_n = \omega_n(1) = \frac{9\pi^2 a}{4l^2} \sqrt{\frac{3\pi+4}{9\pi+8}}$ rad/s. Autoriai atliko (1) lygties tikslaus ir apytikslio Bubnovo–Galiorkino metodų skaičiavimų palyginimus ir nustatė, kad paklaida $\delta\omega_n \approx 0,3\%$. Todėl pagal Bubnovo–Galiorkino metodą gautą ω_n išraišką projektuotojams ir inžinieriams naudoti patogiau negu gautą transcendentinę išraišką tiksluoju metodu.

2. Dvisienio storasienio vamzdžio svyravimų lygtis ir jos sprendimas. Sudarome dvisienio storasienio vamzdžio svyravimo lygtį. Abu sluoksniai turi būti taip sujungti, kad deformacijos procese tangentiniai įtempimai bendros konstrukcijos neišardytų. Tokio vamzdžio svyravimų lygtis analogiška (1) lygčiai, t.y.

$$(\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

arba

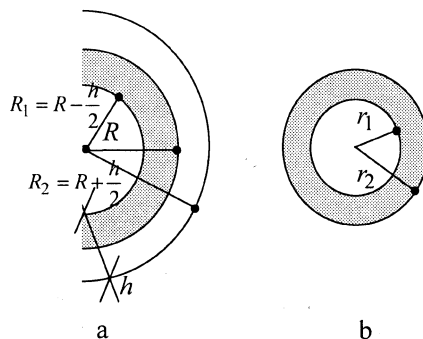
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad (3)$$

čia $A = \sqrt{\frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}}$, E_1, I_1, ρ_1, S_1 – vidinio vamzdžio sluoksnio (metalo), o E_2, I_2, ρ_2, S_2 – išorinio sluoksnio (gumos) parametrai.

Vamzdį keičiame į tokio pat standumo lenkimui dvisluoksnį strypą.

Vamzdžio vidinį sluoksnį (tarp R_1 ir R spindulių) keičiame r_1 spindulio strypu taip, kad $I_1 \text{ žiedo} = I_1 \text{ strypo}$. Tada gauname:

$$r_1 = \sqrt[4]{h \left(R - \frac{h}{4} \right) \left(2R^2 + \frac{h^2}{4} - Rh \right)}.$$



1 pav. Dvisienio apvalaus vamzdžio skerspjūvio (a) transformacijos į dvisluoksnio apvalaus strypo (b) skerspjūvį schema.

Išorinį $\frac{h}{2}$ storio vamzdžio sluoksnį keičiame tos pačios medžiagos strypo išoriniu žiedo pavidalo tarp r_1 ir r_2 spindulių sluoksniu taip, kad $I_{2\text{žiedo}} = I_{2\text{strypo}}$. Tada gauname

$$r_2 = \sqrt[4]{r_1^4 + h \left(R + \frac{h}{4} \right) \left(2R^2 + Rh + \frac{h^2}{4} \right)}.$$

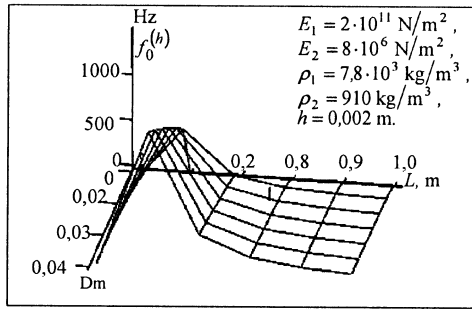
Naujo redukuoto strypo (veleno) antro sluoksnio (gumos) storis $h_1 = r_2 - r_1$.

Kadangi (3) lygtis visai analogiška (1) lygčiai, tai jos sprendimas yra toks pat kaip ir (1) lygties. Todėl:

$$\min \Omega_n = \Omega(1) = \frac{9\pi^2 A}{4l^2} \sqrt{\frac{3\pi + 4}{9\pi + 8}} \text{ rad/s.}$$

Pagal šią metodiką galima skaičiuoti traktoriaus vairo mechanizmo elementų (vairastiebio, stovo) virpėjimo dažnius.

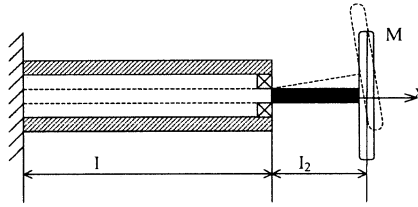
Naudojame tą pačią svyravimų lygtį (1). l ilgio vamzdį keičiame l ilgio velenu (strypu). Tada turime $l_1 = l + l_2$ ilgio strypą ir M masės vairarati. Jeigu l ir l_2



2 pav. Dvisienio metalo-gumos sluoksnio vamzdžio skersinių savųjų svyravimų dažnių (f_0) priklausomybės nuo skersmens (D_2) ir ilgio (l), kai sienelių storis $h_2 = h_1 = 0,002m$, grafikas.

1 lentelė. Išorinio skersmens D_2 , l ilgio plieno vamzdžio skersinių savųjų virpėjimų dažnių ($f_0^{(n)}$), kai sienelės storis $h = 0,002m$, skaičiavimo rezultatai

D_1 , m	$f_0^{(n)} = \omega_0^{(n)} / 2\pi$ Hz				
	l, m				
	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,02	132,55	97,38	74,56	58,91	47,72
0,023	149,73	110,00	84,22	66,55	53,91
0,026	166,29	122,17	93,53	73,90	59,86
0,03	182,32	133,95	102,56	81,03	65,63
0,033	197,91	145,40	111,32	87,96	71,24
0,036	213,10	156,56	119,87	94,71	76,71



3 pav. Traktoriaus vairo mechanizmo schema.

ilgių velenų skersmenys skiriasi, tai reikia nagrinėti konstrukciją standžiai sujungtą iš dviejų velenų. Vairaračio masę virpant vairo mechanizmui keičiame taškine mase. Tada svyravimų lygtis (1) įgyja pavidalą:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

kur $a_1 = \sqrt{\frac{EI}{m_r}}$, čia m_r – redukuota masė.

Atlikus skaičiavimus, gauname:

$$m_r = \frac{4}{3}m_0 + M \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{\ell_2} \right)^2 \right). \quad (4)$$

Čia m_0 yra ℓ_2 ilgio strypo masė, M – vairaračio masė, r_0 – vairaračio spindulys.

Visų vairo kolonėlių konstrukcijų ir jų skaičiavimo tikslas yra mažinti savųjų svyravimų dažnius. Galimi ir naudojami tokie atvejai (žr. 4 pav.).

3. Naujas būdas plonasieniam cilindriniam kevalui (vamzdžiui) apskaičiuoti savuosius skersinius svyravimų dažnius. Naudosime momentinę plonasienių cilindrinį kevalų teoriją ir taikysime jai būdingus supaprastinimus:

Vairo mechanizmo – stovo ir vairaračio principinė schema			
a – serijinė konstrukcija	b – gumos tarpiklis (5) tarp korpuso (4) ir stovo (3)	c – gumos įvorės (6) tarp vairo kolonėlės (2) ir stovo (3)	d – vibracinis slopin tuvas (7) tarp vairo kolonėlės (2) ir korpuso (4)

4 pav. Vairo mechanizme panaudotų konstrukcinių elementų taikymo efektyvumas.

- a) statmenų normalių hipotezę, t.y. normalės prieš ir po deformacijos cilindrinio kevalo viduriniam paviršiu lieka statmenos;
- b) dalis įtempimų tenzorius komponentių yra pagrindinės, o kita dalis – antraeilės, t.y. skaičiuojant deformacijas į kai kuriuos įtempimus nekreipsime dėmesio, o cilindrinio kevalo storis h mažas lyginant su skersiniu ilkiu $u(r; x) \approx u(R; x)$, čia R – cilindrinio kevalo vidurinio paviršiaus spindulys. Nagrinėjamu atveju σ_x ir σ_θ – pagrindiniai įtempimai, o $\sigma_r \approx 0$ ir $\sigma_{xr} \approx 0$.

Remiantis [4–6] įtempimai kiekviename vamzdžio vidaus taške skaičiuojami pagal formules:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left(t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu u}{R} \right), \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{R} + \mu t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ t = r - R. \end{cases} \quad (5)$$

Toliau nagrinėjame vamzdžio elemento pusiausvyrą (5 pav.)

Įvedame tokius žymėjimus:

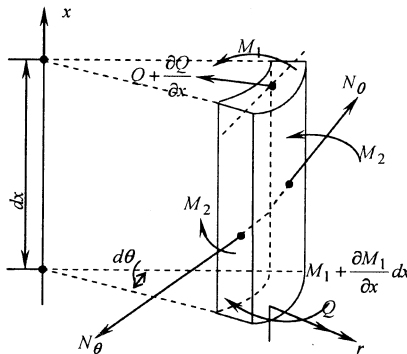
M_1 – elemento lenkimo momentas išilgine kryptimi; M_2 – elemento lenkimo momentas skersine kryptimi; N_θ – elementą tempianti jėga tangentine kryptimi.

Momentai ir jėgos yra skaičiuojami vienam vamzdžio kontūro ilgio vienetui. Ašis r išvesta per elemento centrą statmenai x ašiai. Naudosime momentinę plonasienių vamzdžių deformacijos teoriją. Parašome visų jėgų projekcijų į r ašį balanso lygtį:

$$QhR d\theta - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) hR d\theta - N_\theta h dx d\theta = \rho R^2 d\theta h dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Iš šios lygties parašome:

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} = \rho R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7)$$



5 pav. Cilindrinio vamzdžio elemento pusiausvyros schema.

Be to, yra žinoma, kad $Q = \frac{\partial M_1}{\partial x}$. Tada gauname:

$$-\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{N_\theta}{R} = \rho R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Dabar skaičiuojame momentą M_1 ir jėgą N_θ . Tam tikslui panaudojame (5) lygtis.

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x t \, dt = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t^2 \, dt = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta \, dt = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{u}{R} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dt = \frac{Ehu}{(1 - \mu^2)R}. \quad (10)$$

Po to (9) ir (10) išraiškas įstatome į (8) lygtį ir gauname:

$$\rho R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{Ehu}{(1 - \mu^2)R^2}, \quad \text{arba} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A_1 u - A_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad (11)$$

čia

$$A_1 = \frac{Eh}{\rho(1 - \mu^2)R^3}, \quad A_2 = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)\rho R}.$$

(11) lygties sprendinį ieškome pavidalu $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Daugiklį $X(x)$ parenkame iš atitinkamo tampraus strypo ilinkio lygties sprendinio, kuris tenkina tas pačias (2) kraštines sąlygas, t.y.

$$X(x) = 1 - \cos kx. \quad (12)$$

Kadangi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=l} = 0$, tai $\cos kl = 0$ ir $k = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$. Tada gauname, kad $u(x, t) = (1 - \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l}x) \cdot T(t)$. Funkcijai $T(t)$ skaičiuoti panaudojame apytikslį Bubnovo–Galiorkino metodą. Tam tikslui (11) lygtį $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1 u + A_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ dauginame iš sprendinio $u(x, t)$ ir panariui integruojame pagal $x \in [0; l]$, t.y.

$$\begin{aligned} T'' \int_0^l (1 - \cos kx)^2 \, dx - k^4 A_2 T \int_0^l (1 - \cos kx) \cdot \cos kx \, dx \\ + A_1 T \int_0^l (1 - \cos kx)^2 \, dx = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Kadangi $\int_0^l (1 - \cos kx)^2 \, dx = \frac{3\pi(2n+1) - 8(-1)^n}{2\pi(2n+1)} l$ ir $\int_0^l (1 - \cos kx) \cos kx \, dx = -\frac{\pi(2n+1) - 4(-1)^n}{2\pi(2n+1)} l$, tai iš (13) lygties funkcijai $T(t)$ skaičiuoti gauname tokią paprastą diferencialinę lygtį:

$$T'' + \omega_n^2 T = 0,$$

čia

$$\omega_n = \sqrt{A_1 + \frac{\pi(2n+1) - 4(-1)^n}{3\pi(2n+1) - 8(-1)^n} k^4 A_2},$$

$$k^4 = \frac{\pi^4 (2n+1)^4}{16l^4}. \quad (14)$$

(14) lygties sprendinys yra $T(t) = C_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$, o (11) lygčiai gauname tokią sprendinį:

$$u(x, t) = C_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right), \quad (15)$$

čia ω_n – savieji plonasienio vamzdžio skersinių virpėjimų dažniai išreikšti rad/s, $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ – savieji virpėjimų dažniai išreikšti hercais.

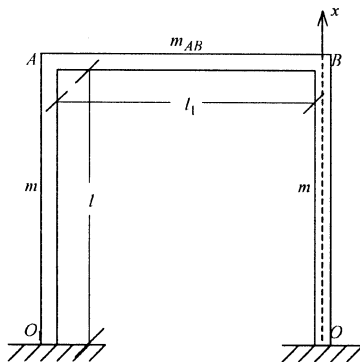
(14) formulė saviesiems cilindrinėms vamzdžiams skersinių virpėjimų dažniams skaičiuoti yra žymiai paprastesnė, nei gaunamos klasikiniu būdu transcendentinės lygtys strypų ir vamzdžių savųjų virpėjimų dažniams skaičiuoti.

Pavyzdys. $l = 1\text{ m}$, $R = 2\text{ cm}$, $h = 2\text{ mm}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho_{\text{plieno}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\mu_{\text{plieno}} = 0,29$. Tada gauname $\min f_n = f(1) = 12700\text{ Hz}$.

4. Rėminių mechanizmų valdymo įtaisų savųjų skersinių svyravimų dažnių skaičiavimas. Mažagabaritinių savaeigių mechanizmų vairavimo įrenginių dažnai sudaro stačiakampis cilindrinis rėmas su rankenomis. Tokio mechanizmo schema parodyta 6 pav.

Stačiakampį rėmą sudaro du vienodi m masės plonasieniai cilindriniai l ilgio vamzdžiai sujungti standžia l_1 ilgio ir m_{AB} masės jungtimi. Veikiant impulso jėgomis rėmo vamzdžių O_1A ir OB skersiniai virpėjimai yra vienodi. Todėl rėmo O_1ABO virpėjimus galima pakeisti vieno vamzdžio OB virpėjimais su redukuota mase m_{red} , kurią skaičiuosime tokiu būdu [5]:

$$m_{red} = m_{AB} + m(1 + p), \quad (16)$$



6 pav. Stačiakampio rėmo schema.

čia

$$p = \frac{117\alpha^2 + 123\alpha + 33}{35(3\alpha + 2)^2}, \quad \alpha = \frac{l_1}{l}. \quad (17)$$

Tada rėmo skersinių svyravimų dažnius skaičiuojame pagal (14) formules tankį ρ pakeitę redukuotu tankiu ρ_r . Rėmo skersinių svyravimų dažniams skaičiuoti turėsime tokią formulę:

$$\min f_{nred} = f_{1red} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{A_1 + \frac{3\pi + 4}{9\pi + 8} \cdot \frac{3^4\pi^4}{16l^4} A_2}, \quad (18)$$

$$\text{čia } A_1 = \frac{Eh}{\rho_{red}(1-\mu^2)R^3}; \quad A_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)\rho_{red}R}.$$

5. *Dviejų sluoksnių plonasienio vamzdžio ir rėmo skersiniai virpėjimai.* Nagrinėjame atvejį, kai plonasienį h storio ir l ilgio vamzdį sudaro du tarpusavyje sumauti po $\frac{h}{2}$ storio skirtingos medžiagos vamzdžiai (pvz. vidinis sluoksnis plieninis, o išorinis plastikinis arba guminis). Abu sluoksniai turi būti taip sujungti, kad deformacijos procese tangentiniai įtempimai bendros konstrukcijos neišardytų [10]. Vidinio sluoksnio įtempimus žymėkime σ_x^+ , σ_θ^+ , o išorinio σ_x^- , σ_θ^- . Tada vidiniai vamzdžio įtempimai skaičiuojami pagal formules:

$$\begin{cases} \sigma_x^+ = \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu_1 u}{R} \right), \\ \sigma_x^- = \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left(t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu_2 u}{R} \right), \\ \sigma_\theta^+ = \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(\frac{u}{R} + \mu_1 t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_\theta^- = \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left(\frac{u}{R} + \mu_2 t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ t = r - R. \end{cases} \quad (19)$$

Panaudoję (19) lygtis abiejuose plonasienio vamzdžio sluoksniuose skaičiuojame lenkimo momentą M_1 ir jėgą N_θ :

$$\begin{aligned} M_1^+ &= \int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma_x^+ t dt = \frac{E_1 h^3}{24(1-\mu_1^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{E_1 \mu_1 h^2}{8(1-\mu_1^2)R} u; \\ M_1^- &= \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_x^- t dt = \frac{E_2 h^3}{24(1-\mu_2^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E_2 \mu_2 h^2}{8(1-\mu_2^2)R} u; \\ N_\theta^+ &= \int_{-\frac{h}{2}}^0 \sigma_\theta^+ dt = \frac{E_1 h u}{2(1-\mu_1^2)R} - \frac{E_1 \mu_1 h^2}{8(1-\mu_1^2)R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ N_\theta^- &= \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta^- dt = \frac{E_2 h u}{2(1-\mu_2^2)R} + \frac{E_2 \mu_2 h^2}{8(1-\mu_2^2)R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Lenkiamo vamzdžio elemento (5 pav.) bendras lenkimo momentas $M_1 = M_1^+ + M_1^-$ ir $N_\theta = N_\theta^+ + N_\theta^-$. Tada gauname:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{h^3}{24} \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^2}{8R} \left(\frac{E_1 \mu_1}{1-\mu_1^2} - \frac{E_2 \mu_2}{1-\mu_2^2} \right) u; \\ N_\theta &= \frac{h}{2R} \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \right) u - \frac{h^2}{8} \left(\frac{E_1 \mu_1}{1-\mu_1^2} - \frac{E_2 \mu_2}{1-\mu_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

(21) išraiškas statome į vamzdžio elemento (8) pusiausvyros lygtį ir gauname:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_1 + \rho_2)R}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{h^3}{24} \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^2}{8R} \left(\frac{E_1 \mu_1}{1-\mu_1^2} - \frac{E_2 \mu_2}{1-\mu_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{h}{2R^2} \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \right) u + \frac{h^2}{8R} \left(\frac{E_1 \mu_1}{1-\mu_1^2} - \frac{E_2 \mu_2}{1-\mu_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \text{arba} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\bar{A}_1 u - \bar{A}_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \bar{A}_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

čia

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{h}{(\rho_1 + \rho_2)R^3} \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \right), \\ \bar{A}_2 &= \frac{h^3}{12(\rho_1 + \rho_2)R} \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \right), \\ \bar{A}_3 &= \frac{h^2}{2(\rho_1 + \rho_2)R^2} \left(\frac{E_1 \mu_1}{1-\mu_1^2} - \frac{E_2 \mu_2}{1-\mu_2^2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

(22) diferencialinę dalinėmis išvestinėmis lygtį su (2) kraštinėmis sąlygomis sprendžiame analogiškai kaip ir (11) lygtį Bubnovo–Galiorkino metodu. Gauname, kad $u(x, t) = (1 - \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l}x) \cdot T(t)$, o funkcijai $T(t)$ skaičiuoti gauname tokią lygtį:

$$\begin{aligned} T'' \int_0^l (1 - \cos kx)^2 dx + \bar{A}_1 T \int_0^l (1 - \cos kx)^2 dx - k^4 \bar{A}_2 T \int_0^l (1 - \cos kx) \cos kx dx \\ - k^2 \bar{A}_3 T \int_0^l (1 - \cos kx) \cos kx dx = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Suintegravę (24) lygybės narius gauname:

$$\begin{aligned} \frac{3\pi(2n+1) - 8(-1)^n}{2\pi(2n+1)} l T'' + \frac{3\pi(2n+1) - 8(-1)^n}{2\pi(2n+1)} l \bar{A}_1 T + \frac{\pi(2n+1) - 4(-1)^n}{2\pi(2n+1)} l k^4 \bar{A}_2 T \\ + \frac{\pi(2n+1) - 4(-1)^n}{2\pi(2n+1)} \cdot l k^2 \bar{A}_3 T = 0, \quad \text{arba} \end{aligned}$$

$$T'' + \bar{\omega}_n^2 T = 0, \quad (25)$$

$$\text{čia } \bar{\omega}_n = \sqrt{\bar{A}_1 + \frac{\pi(2n+1)-4(-1)^n}{3\pi(2n+1)-8(-1)^n}(k^4 \bar{A}_2 + k^2 \bar{A}_3)},$$

$$k = \frac{\pi(2n+1)}{2l}. \quad (26)$$

$\bar{\omega}_n$ reiškia dvisluoksnio plonasienio vamzdžio skersinių virpėjimų savuosius dažnius, kurie išreikšti rad/s, o $\bar{f}_n = \frac{\bar{\omega}_n}{2\pi}$ – savieji dažniai išreikšti hercais.

Pavyzdys. $l = 1\text{m}$, vidinis vamzdžio sluoksnis plieninis $E_1 = 2 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$, $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3\text{kg/m}^3$, $\mu_1 = 0,29$, $R = 2\text{cm}$, $h = 4\text{mm}$ (dvigubas sluoksnis), išorinis vamzdžio sluoksnis guminis $E_2 = 8 \cdot 10^6\text{N/m}^2$, $\rho_2 = 910\text{kg/m}^3$, $\mu_2 = 0,47$. Tada gauname $\min \bar{f}_n = \bar{f}_1 = 12600\text{Hz}$. Palyginus vienodų matmenų vienasluoksnių ir dvisluoksnių plonasienių vamzdžių skersinių virpėjimų savuosius dažnius matome, kad jų skirtumas yra nežymus. Tačiau yra žinoma, kad lyginant storasienių vienasluoksnių ir dvisluoksnių vamzdžių skersinių virpėjimų dažnius pastarųjų sumažėjimas yra ženklus [8].

Skaičiuojant stačiakampio rėmo sudaryto iš dvisluoksnių vamzdžių skersinius virpėjimus (26) ir (23) formulėse vamzdžio bendrą tankį $\rho = \rho_1 + \rho_2$ reikia pakeisti redukuotos masės tankiu $\rho_{red} = \rho_{AB} + \rho(1 + p)$.

Išvados

1. Sudarytos vienasluoksnių ir dvisluoksnių cilindrinė vamzdžių skersinių virpėjimų diferencialinės lygtys pagal momentinę cilindrinė vamzdžių deformacijų teoriją.
2. Naudojant apytikslį Bubnovo–Galiorkino metodą gautos cilindrinė vamzdžių skersinių įlinkių lygtys ir savieji svyravimų dažniai, kuriuos nesunku taikyti praktiniam skaičiavimui ir projektavimui.
3. Lyginant storasienių ir plonasienių vienasluoksnių ir dvisluoksnių cilindrinė vamzdžių savuosius skersinių svyravimų dažnius daroma išvada, kad praktiškiausia naudoti dvisluoksnius (pvz. plienas–guma) storasienius vamzdžius, nes jų savieji svyravimų dažniai yra mažiausi.

Literatūra

1. D. Merllie, P. Pascal, Trečiasis Europos darbo sąlygų tyrimas, *Europos fondas gyvenimo ir darbo sąlygom gerinti* (2000). <http://www.socmin.lt>
2. S. Merkevičius, Vibration control in the “man-machine” system, *Proceedings of the International Conference of IFToM “Man Under Vibration–98”*, Kaunas, Lithuanian University of Agriculture (1998), pp. 83–88.
3. Profesinės ligos, jų aplinkybių ir priežasčių analizė, *VDI metinės ataskaitos*. <http://www.vdi.lt>
4. Н.И. Безухов, *Основы теории упругости, пластичности и ползучести*, Москва, Высшая школа (1961).
5. А.П. Филлипов, *Колебания деформируемых систем*, Москва, Машино строение (1961).
6. A. Bartaševičius, S. Merkevičius, R. Vagusevičius, *Mathematical modelling of steering mechanism link vibration process in low power tractor*, *Technologija*, ISSN 1392-2114, Ultragarasas, Kaunas, 3(36), 42–46 (2000).

7. A. Bartaševičius, S. Merkevičius, R. Vagusevičius, Dinaminis rankas veikiančių virpesių slopinimas vairo mechanizme, *Mechanika*, ISSN 1392-1207, Kaunas, Technologija, 1(27), 42–47 (2001).
8. A. Bartaševičius, S. Merkevičius, P. Ilgakojis, Mašinų ir mechanizmų mechaninių valdymo įtaisų virpėjimo proceso matematinis modeliavimas, *Mechanikos inžinerija*, ISSN 1648-116X, Vagos LŽŪU mokslo darbai, 62(15), 98–103 (2004).
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория упругости*, Москва, Наука (1965).
10. Ю.Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Москва, Наука (1966).

SUMMARY

A. Bartaševičius, P. Ilgakojis, S. Merkevičius. Mathematical modeling of the self vibration frequencies of mechanical frames of controls rigs

Cross vibrations in cylindrical thin – border tubes and in rectangular frames which are made from these tubes and calculating method of their frequency are analyzed in the article. The theory of instantaneous cylindrical tubes and main equations of theory of elasticity can be used to develop the mathematical model. Vibrations of one and two layers thin – border tubes are considered, differential equations with partial derivatives are created to describe vibrations. Determination of approximate solution method of differential equations are simple and practical which can be used to calculate self vibration frequencies. Digital values of self vibration frequencies in one and two layers thin – border tubes and in rectangular frames which are made from these tubes are compared.

Keywords: cylindrical tubes, elasticity, movement, differential equations, self vibration frequencies.