Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 356–360

Trijų krypčių priverstinės sinchronizacijos sistemos matematinio modelio sudarymas ir tyrimas

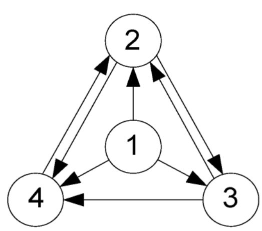
Violeta BORSUK, Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: violeta.borsuk@kobra.ktu.lt, jonas.rimas@ktu.lt

1. Įvadas

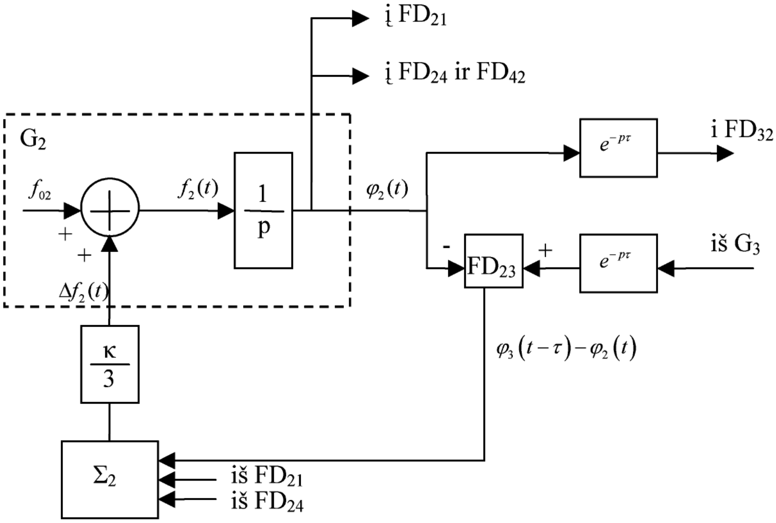
Ryšio tinklo komutacijos centruose esantys taktiniai generatoriai gali būti sinchronizuojami, panaudojant priverstinę sinchronizacijos sistemą [1]. Tokioje sistemoje vieno generatoriaus, vadinamo vedančiuoju, dažnis nėra valdomas. Kitų (valdomų) generatorių dažniai yra keičiami, įvertinant generatorių virpesių fazių skirtumus ir naudojant automatinę fazinę dažnio keitimo sistemą [1, 2]. Realiame ryšio tinkle atstumai tarp komutacijos centrų yra dideli, todėl tenka įvertinti signalo, perduodamo ryšio linijomis, vėlavimus. Taigi, priverstinės sinchronizacijos sistema yra automatinė valdymo sistema su vėlavimais. Tokios sistemos yra aprašomos diferencialinėmis lygtimis su vėluojančiu argumentu [3, 4]. Yra daug publikacijų, kuriose analizuojami sistemų su vėlavimais stabilumo klausimai (žr. [4] literatūros sąrašą), tačiau trūksta darbų skirtų tiksliam analiziniam tokių sistemų tyrimui. Šiame darbe pateikiame priverstinės sinchronizacijos sistemos, sudarytos iš keturių generatorių, matematinio modelio tikslų analizinį tyrimą.

2. Sinchronizacijos sistemos matematinis modelis

Nagrinėjamos sistemos schema, vaizduojanti taktinius generatorius (skrituliukai) ir ryšio linijas, kuriomis perduodami sinchronizacijos signalai (orientuotos tiesės atkarpos), pateikta 1 pav. 2 pav. duota antrojo generatoriaus valdymo struktūrinė schema, kurioje pažymėta: G_i – i-tasis generatorius ($i = 2, 3$), f_{02} – antrojo generatoriaus savasis dažnis (dažnis, kai valdymas išjungtas), $f_2(t)$ ir $\varphi_2(t)$ – antrojo generatoriaus



1 pav. Priverstinės sinchronizacijos sistemos schema.



2 pav. Antrojo sinchronizacijos sistemos generatoriaus valdymo struktūrinė schema.

dažnis ir fazė; Σ_2 – sumatorius, esantis antrojo generatoriaus valdymo grandinėje, FD_{ij} – ij-tosios linijos fazinis detektorius (ij-toji linija yra ryšio linija, kuria perduodamas sinchronizacijos signalas iš j-tojo generatoriaus į i-tąjį), κ – koeficientas, turintis dažnio dimensiją (jis dalijamas iš trijų, kadangi į antrojo generatoriaus valdymo grandinės sumatorių Σ_2 ateina signalai iš trijų fazinių detektorių), $\Delta f_2(t)$ – antrojo generatoriaus valdymo signalas, $\frac{1}{p}$ – integratoriaus perdavimo funkcija, $e^{-p\tau}$ – ryšio linijos perdavimo funkcija, τ – signalo vėlavimas ryšio linijoje.

Kitų generatorių valdymo struktūrinės schemos vaizduojamos analogiškai.

Remdamiesi generatorių valdymo struktūrinėmis schemomis ir įvertinę sąryšį $f_i(t) = \varphi_i'(t)$ $(i = \overline{1,4})$, parašome diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistemą (ji yra negrinėjamos sinchronizacijos sistemos matematinis modelis):

$$\varphi_i'(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), \quad i = \overline{1,4}; \tag{1}$$

čia $f_i(t)$ ir $\varphi_i(t)$ – i-tojo generatoriaus dažnis ir fazė, f_{0i} – i-tojo generatoriaus savasis dažnis,

$$\Delta f_i(t) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \frac{\kappa}{3}[\varphi_1(t-\tau) - \varphi_2(t)] + \frac{\kappa}{3}[\varphi_3(t-\tau) - \varphi_2(t)] \\ \quad + \frac{\kappa}{3}[\varphi_4(t-\tau) - \varphi_2(t)], & i = 2, \\ \frac{\kappa}{2}[\varphi_1(t-\tau) - \varphi_3(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_2(t-\tau) - \varphi_3(t)], & i = 3, \\ \frac{\kappa}{3}[\varphi_1(t-\tau) - \varphi_4(t)] + \frac{\kappa}{3}[\varphi_2(t-\tau) - \varphi_4(t)] \\ \quad + \frac{\kappa}{3}[\varphi_3(t-\tau) - \varphi_4(t)], & i = 4 \end{cases} \tag{2}$$

– i-tojo generatoriaus valdymo signalas, τ – perduodamo signalo vėlavimas ryšio linijoje.

Įvesime apibendrintą diferencijavimo operatorių D (taikomą apibendrintoms funkcijoms [5]). Tai supaprastins (1) lygties sprendinio gavimo procedūrą.

Pažymėkime

$$x_i(t) = \varphi_i(t)1(t); \tag{3}$$

čia $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ – Hevisaido vienetinė funkcija, $x_i(t)$ – apibendrinta funkcija, sutampanti su $\varphi_i(t)$, kai $t \geqslant 0$. Tada

$$Dx_i(t) = D\big(\varphi_i(t)1(t)\big) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t), \quad i = \overline{1,n}; \tag{4}$$

čia $\delta(t)$ – Dirako delta funkcija.

Remdamiesi (1)–(4) išraiškomis parašome diferencialinių lygčių sistemą funkcijoms $x_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{3}[x_1(t-\tau) - x_2(t)] + \frac{\kappa}{3}[x_3(t-\tau) - x_2(t)] \\ \quad + \frac{\kappa}{3}[x_4(t-\tau) - x_2(t)] + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}[x_1(t-\tau) - x_3(t)] + \frac{\kappa}{2}[x_2(t-\tau) - x_3(t)] + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{3}[x_1(t-\tau) - x_4(t)] + \frac{\kappa}{3}[x_2(t-\tau) - x_4(t)] \\ \quad + \frac{\kappa}{3}[x_3(t-\tau) - x_4(t)] + z_4(t); \end{cases} \tag{5}$$

čia

$$z_i(t) = \begin{cases} f_{01}1(t) + \varphi_{01}\delta(t), & i = 1, \\ f_{02}1(t) + \varphi_{02}\delta(t) \\ \quad + \frac{\kappa}{3}[\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)](1(t) - 1(t-\tau)), & i = 2, \\ f_{03}1(t) + \varphi_{03}\delta(t) \\ \quad + \frac{\kappa}{2}[\varphi_1(t-\tau) + \varphi_2(t-\tau)](1(t) - 1(t-\tau)), & i = 3, \\ f_{04}1(t) + \varphi_{04}\delta(t) \\ \quad + \frac{\kappa}{3}[\varphi_1(t-\tau) + \varphi_2(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)](1(t) - 1(t-\tau)), & i = 4 \end{cases} \tag{6}$$

– i-tosios lygties laisvasis narys, priklausantis nuo pradinių sąlygų.

3. Pereinamosios funkcijos

Pereinamąja funkcija $h_{ij}(t)$vadinsime i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į j-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį. Pereinamųjų funkcijų visuma ($h_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,4}$) sudaro sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą $h(t) = (h_{ij}(t))$. Rasime šios matricos elementus.

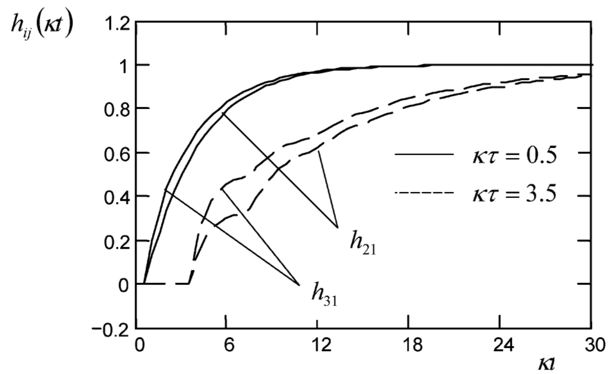
Kai vienetinis fazės šuolis veikia j-tojo generatoriaus virpesio fazę, (5) lygčių sistemos j-tosios lygties laisvasis narys įgauna pokytį

$$\Delta z_j(t) = \delta(t). \tag{7}$$

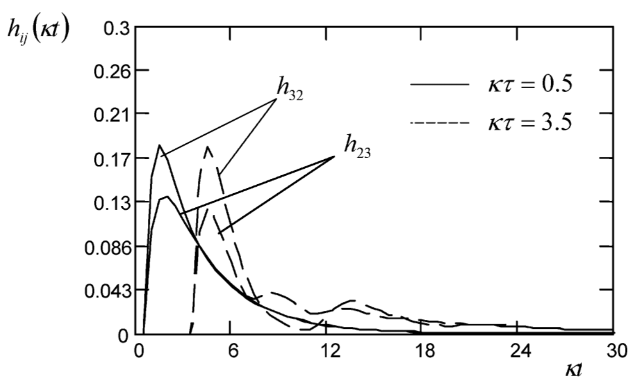
Remdamiesi (5) ir (7) išraiškomis, parašome diferencialinių lygčių sistemą pereinamosioms funkcijoms $h_{i1}(t)$ $(i=\overline{1,4})$:

$$\begin{cases} Dh_{11}(t)=\delta(t), \\ Dh_{21}(t)=\frac{\kappa}{3}[h_{11}(t-\tau)+h_{31}(t-\tau)+h_{41}(t-\tau)]-\kappa h_{21}(t), \\ Dh_{31}(t)=\frac{\kappa}{2}[h_{11}(t-\tau)+h_{31}(t-\tau)]-\kappa h_{31}(t), \\ Dh_{41}(t)=\frac{\kappa}{3}[h_{11}(t-\tau)+h_{21}(t-\tau)+h_{31}(t-\tau)]-\kappa h_{41}(t). \end{cases} \tag{8}$$

Šią sistemą sprendžiame naudodami operacinį metodą. Taikydami Laplaso transformaciją, parašome atitinkamą operatorinių lygčių sistemą ir randame operatorinį sprendinį. Pritaikę jam atvirkštinę Laplaso transformaciją, randame sistemos sprendinį – pereinamąsias funkcijas $h_{i1}(t)$ $(i=\overline{1,4})$. Dėl vietos stokos pateikiame tiktai vieną šio spren-



a)



b)

3 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai.

dinio komponentę:

$$h_{21}(t) = \frac{1}{3}h_{21}^{(1)}(t) + \frac{5}{18}h_{21}^{(2)}(t) + h_{21}^{(3)}(t), \tag{9}$$

čia

$$h_{21}^{(i)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{5^k}{18^k}\left[1 - \sum_{m=0}^{3n-k+i-1}\frac{\kappa^m(t-(3n-k+i)\tau)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\kappa(t-(3n-k+i)\tau)}\right]$$
$$\times\, 1\big(t-(3n-k+i)\tau\big), \quad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Analogiškai sudarome diferencialinių lygčių sistemas pereinamosioms funkcijoms $h_{i2}(t)$, $h_{i3}(t)$ ir $h_{i4}(t)$ $(i = \overline{1,4})$. Jas išsprendę, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą $h(t)$. Remiantis išvestomis išraiškomis skaičiuojame pereinamąsias funkcijas ir braižome jų grafikus. Keletas pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikų pateikti 3 pav.

4. Išvados

Analizuodami skaičiavimo rezultatus ir sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų grafikus galime padaryti šias išvadas:

1. Pereinamojo proceso trukmė sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo vėlavimo τ ir koeficiento κ sandaugos dydžio: didėjant $\kappa\tau$ pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti. Pavyzdžiui, pereinamosios funkcijos $h_{31}(\kappa t)$ grafikas kerta lygio $1-\Delta$ $(\Delta = 0,001)$ liniją prie šių argumento κt reikšmių: 15 (kai $\kappa\tau = 0,5$) ir 66 (kai $\kappa\tau = 3,5$). Vadinasi, sandaugą $\kappa\tau$ padidinus 7 kartus (nuo 0,5 iki 3,5) – pereinamojo proceso trukmė padidėja ∼2,5 karto.

2. Kai $\kappa\tau < 1$ pereinamasis procesas yra aperiodinis. Kai $\kappa\tau > 1$ pereinamasis procesas įgauna virpamojo proceso požymių.

Literatūra

1. S. Bregni, A historical perspective on telecomunications networks synchronization, *IEEE Communications Magazine*, **36**(6), 158–166 (1998).
2. W.C. Lindsey, J.H. Chen, Mutual clock synchronization in global digital communication networks, *Euro. Trans. Telecommun.*, **7**(1), 25–37 (1996).
3. J. Rimas, Tarpusavio sinchronizacijos sistemos dinamikos tyrimas, *Radiotechnika*, **32**(2), 3–9 (1977) (rusų k.).
4. K. Gu, V. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Time Delay Systems*, Birkhauser (2003).
5. P. Antosik, J. Mikusinskij, R. Sikorskij, *Apibendrintų funkcijų teorija*, Mir (1976) (rusų kalba).

SUMMARY

V. Borsuk, J. Rimas. Development and investigation of the mathematical model for threedirectional forced synhronization system

Investigation of the threedirectional forced synhronization system, composed of four oscillators, is carried out. The exact expressions of the step responses functions for the synchronization system are derived and the transition process in the system is analysed.

Keywords: delay systems, differential equations with delay arguments, step responses functions.