Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.,* 2007, 113–118

Оценки коэффициентов Тейлора функций из класса $\widetilde{K}_n(E)$

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. В работе даются оценки коэффициентов Тейлора функций из класса $\tilde{K}_n(E)$. Этот класс состоит из голоморфных и нормированных в единичном круге E функций $F(z)$, у которых n-ая разделенная разность отлична от нуля в E.

Ключевые слова: голоморфная функция, однолистная функция, разделенная разность, классы функций, коэффициенты.

Определим разделенную разность n-го порядка голоморфной в единичном круге E (т.е. в круге $|z| < 1$) функции $F(z)$ формулой (см. [1])

$$\big[F(z); z_0, ..., z_n\big] = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)...(\xi - z_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур из E, охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n \in E$.

Автором этой статьи (см. [2]) был введен класс $K_n(E)$ голоморфных в E функций $F(z)$, для которых n-ая разделенная разность $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \dots, z_n \in E$. Класс $K_1(E)$ полностью совпадает с классом всех однолистных в E функций. Классы $K_n(E)$, $n = 2, 3, \dots$ обладают многими замечательными свойствами, часть из которых аналогична свойствам однолистных функций (см. [3]). Отметим два свойства.

СВОЙСТВО 1. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то в $F^{(n)}(z) \neq 0$ в E.*

СВОЙСТВО 2. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то $aF(z) + P(z) \in K_n(E)$, где $a \neq 0$ и $P(z)$ – любой многочлен степени не выше $n - 1$.*

Опираясь на свойства 1, 2, можно выделить из $K_n(E)$ класс $\tilde{K}_n(E)$ функций

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1}.$$

Нетривиальным примером функции из класса $\tilde{K}_n(E)$, является функция

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n}{(1-z)^2}\Big(1 + \frac{1-n}{1+n}z\Big) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1}.$$

Каждую функцию из класса $\tilde{K}_n(E)$ можно записать в виде

$$F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,1} z^k. \tag{1}$$

В 1916 году немецким математиком Л. Бибербахом (см. [4]) была высказана следующая гипотеза. Если функция $F(z)$ вида (1) принадлежит классу $\tilde{K}_1(E)$ то для ее комплексных коэффициентов имеют место оценки

$$|a_{k,1}| \leqslant k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

со знаком равенства для функции

$$\Phi_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots$$

из класса $\tilde{K}_1(E)$. В 1916 году Гронуолл (см. [5]) без доказательства высказал теорему о том, что в классе $\tilde{K}_1(E)$ справедлива оценка для производной:

$$\left|F^{(1)}(z)\right| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad \forall z \in E. \tag{3}$$

Бибербах (см. [4]) доказал (3) со знаком равенства для функции $\Phi_1(z)$.

Многочисленные попытки доказать или опровергнуть гипотезу Л. Бибербаха многие десятилетия не имели успех. В то же время были получены оценки для отдельных коэффициентов. Например, если функция $F(z)$ вида (1) принадлежит классу $\tilde{K}_1(E)$, то имеют место оценки: $|a_{2,1}| \leqslant 2$ (Бибербах, 1916), $|a_{3,1}| \leqslant 3$ (Левнер, 1923), $|a_{4,1}| \leqslant 4$ (Гарабедян и Шиффер, 1955). Заметим, что Дьедонне в 1931 г., Рогозинский в 1932 г. и Сас в 1933 г. доказали неравенства (2), предполагая, что все коэффициенты a_k, $k = 2, 3, \ldots$ являются вещественными числами.

Только в 1984 году американский математик Луи де Бранж (см. [6]) доказал неравенства (2) для комплексных коэффициентов при всех $k \geqslant 2$. При этом оказалось, что знак равенства реализуется функцией $\Phi_1(z)$.

Важно заметить, что еще в 1926 году (см. [4]), после неудачных попыток доказать неравенства (2) для комплексных коэффициентов однолистных функций (1), немецкий математик Э. Ландау установил неравенства

$$\frac{1}{k!}\left|F^{(k)}(z)\right| \leqslant \frac{k+|z|}{(1-|z|)^{k+2}}, \quad F(z) \in \tilde{K}_1(E), \quad \forall z \in E, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

для тейлоровских коэффициентов, однако, в предположении, что гипотеза Бибербаха справедлива, т.е. в предположении, что действительно имеют место неравенства (2) для маклореновских коэффициентов. В 1987 году И. Александров (см. [7], [8]), уже зная о теореме Луи де Бранжа, снова доказал неравенства (4) методом, который существенно отличался от метода Э. Ландау. Целью нашей работы является

ТЕОРЕМА. *Если для любой функции*

$$F(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,n}z^{n+k-1} \tag{5}$$

из класса $\tilde{K}_n(E)$, $n\geqslant 1$, ее комплексные коэффициенты $a_{k,n}$, $k=2,3,\dots$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_{k,n}|\leqslant\frac{n+2k-1}{n+1},\quad k=2,3,\dots, \tag{6}$$

то справедливы также неравенства

$$\frac{|F^{(n+k-1)}(z)|}{(n+k-1)!}\leqslant\frac{\frac{n+2k-1}{n+1}+|z|}{(1-|z|)^{n+k+1}},\quad \forall z\in E,\quad k=2,3,\dots. \tag{7}$$

Знак равенства в (7) *при любом $k\geqslant 2$ реализуется функцией $\Phi_n(z)$.*

Доказательство. Пусть $\omega=\omega(z;\zeta)=(z+\zeta)/(1+\bar{\zeta}z)$, где $\zeta\in E$, множество всех автоморфизмов круга E. Введем нормирующий оператор

$$N_n\bigl[\varphi(z)\bigr]=\frac{n!}{\varphi^{(n)}(0)}\Bigl(\varphi(z)-\varphi(0)-\frac{1}{1!}\varphi^{(1)}(0)z-\dots-\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)z^{n-1}\Bigr),$$

где $\varphi(z)$ – голоморфная в E функция с условием $\varphi^{(n)}(0)\neq 0$.

Пусть функция $F(z)$ вида (5) принадлежит классу $\tilde{K}_n(E)$. Рассмотрим функцию

$$\Psi(z;\zeta)=N_n\bigl[(1+\bar{\zeta}z)^{n-1}F\bigl(\omega(z;\zeta)\bigr)\bigr].$$

Функция $\Psi(z;\zeta)$ также принадлежит классу $\tilde{K}_n(E)$ при любом $\zeta\in E$ (см. [8]) и разложение ее в степенной ряд имеет вид:

$$\Psi(z;\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,n}(\zeta)z^{n+k-1},\quad a_{1,n}(\zeta)\equiv 1. \tag{8}$$

Коэффициенты $a_{k,n}(\zeta)$ легко вычисляются по формуле

$$a_{k,n}(\zeta)=\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^mC_{k-1}^m\bar{\zeta}^m\bigl(1-|\zeta|^2\bigr)^{k-m-1}\frac{n!F^{(n+k-m-1)}(\zeta)}{(n+k-m-1)!F^{(n)}(\zeta)}, \tag{9}$$
$$k=1,2,3,\dots.$$

Пусть $p \geqslant 2$ – произвольно фиксированное натуральное число. Тогда из (9) при $k = 2, \ldots, p$ получим для любого $\zeta \in E$ систему из $p-1$ уравнений

$$\sum_{m=0}^{1} (-1)^m C_1^m \bar{\zeta}^m \big(1-|\zeta|^2\big)^{1-m} \frac{n!F^{(n+1-m)}(\zeta)}{(n+1-m)!F^{(n)}(\zeta)} = a_{2,n}(\zeta),$$

$$\sum_{m=0}^{2} (-1)^m C_2^m \bar{\zeta}^m \big(1-|\zeta|^2\big)^{2-m} \frac{n!F^{(n+2-m)}(\zeta)}{(n+2-m)!F^{(n)}(\zeta)} = a_{3,n}(\zeta),$$

$$\ldots$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m C_{p-1}^m \bar{\zeta}^m \big(1-|\zeta|^2\big)^{p-1-m} \frac{n!F^{(n+p-1-m)}(\zeta)}{(n+p-1-m)!F^{(n)}(\zeta)} = a_{p,n}(\zeta)$$

с $p-1$ неизвестными $F^{(n+l)}(\zeta)/F^{(n)}(\zeta)$, $l = 1, \ldots, (p-1)$. Решив систему относительно этих неизвестных, получим в случае $l = p-1$ тождество

$$\frac{n!F^{(n+p-1)}(\zeta)}{(n+p-1)!F^{(n)}(\zeta)} = \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m a_{p-m}(\zeta)\bar{\zeta}^m, \quad \forall \zeta \in E. \tag{10}$$

В силу произвольного выбора p, $p \geqslant 2$, тождество (10) имеет место для любого натурального p. Из (10) следуют оценки

$$\frac{n!|F^{(n+p-1)}(\zeta)|}{(n+p-1)!|F^{(n)}(\zeta)|} \leqslant \frac{1}{(1-|\zeta|^2)^{p-1}} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m \big|a_{p-m}(\zeta)\big| |\zeta|^m, \tag{11}$$
$$\forall \zeta \in E, \quad p = 2, 3, \ldots.$$

Так как $\Psi(z;\zeta) \in \tilde{K}_n(E)$ при любом $\zeta \in E$, то из (6), (7) следуют неравенства

$$\big|a_{p-m}(\zeta)\big| \leqslant \frac{n+2(p-m)-1}{n+1}, \quad \forall \zeta \in E, \quad m = 0, 1, \ldots, (p-1).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m \frac{n+2(p-m)-1}{n+1} |\zeta|^m$$
$$= \Big(\frac{n+2p-1}{n+1} + |\zeta|\Big)\big(1+|\zeta|\big)^{p-2}, \quad \forall \zeta \in E.$$

Значит, неравенство (11) можно заменить следующим образом:

$$\frac{n!|F^{(n+p-1)}(\zeta)|}{(n+p-1)!|F^{(n)}(\zeta)|} \leqslant \frac{\frac{n+2p-1}{n+1} + |\zeta|}{(1+|\zeta|)(1-|\zeta|)^{p-1}}, \quad \forall \zeta \in E. \tag{12}$$

Из (9) имеем

$$a_{2,n}(\zeta) = -\bar{\zeta} + \left(1 - |\zeta|^2\right) \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)}.$$

Так как из (6) при $k = 2$ следует $|a_{2,n}(\zeta)| \leqslant (n+3)/(n+1)$, то

$$\left|\zeta \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)} - \frac{(n+1)r}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{(n+3)r}{1-r^2}, \quad \text{где} \quad |\zeta| = r.$$

Замечая, что

$$\operatorname{Re}\left\{\zeta \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)}\right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \ln \left|F^{(n)}(\zeta)\right|,$$

получим неравенство

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \left|F^{(n)}(\zeta)\right| \leqslant \frac{(n+1)r + n + 3}{1 - r^2}.$$

Интегрируя это неравенство по r от нуля до r, получим

$$\frac{|F^{(n)}(\zeta)|}{n!} \leqslant \frac{1 + |\zeta|}{(1 - |\zeta|)^{n+2}}. \tag{13}$$

Опираясь на (12), (13) убеждаемся в справедливости оценок (7). Далее, с помощью простых вычислений можно убедиться в том, что знак равенства при любом $k \geqslant 2$ реализуется функцией $\Phi_n(z)$ из класса $\tilde{K}_n(E)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в теореме взять $n = 1$, то, как отмечалось выше, неравенства (6) были доказаны американским математиком Луи де Бранжем. Поэтому в нашей теореме в случае $n = 1$ неравенства (6) можно убрать и использовать их уже в процессе доказательства. В итоге мы снова получим неравенства (4). При этом наш метод проще и существенно отличается от методов, предложенных Э. Ландау и И. Александровым.

Замечание 2. Неравенства (6) для комплексных коэффициентов $a_{k,n}$, $k = 2, 3, \ldots$ функции вида (5) из класса $\tilde{K}_n(E)$ при $n \geqslant 2$ пока доказать не удается. Однако есть все основания высказать следующую гипотезу.

Гипотеза (Э.Г. Кирьяцкий). Если $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$, где $n \geqslant 2$, то

$$\left|a_{k,n}(F)\right| \leqslant \frac{n + 2k - 1}{n + 1}, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Литература

1. И.И. Ибрагимов, *Методы интерполяции функций и некоторые их применения*, Наука, Москва (1971).
2. Э.Г. Кирьяцкий, О функциях, n-ая разделенная разность которых не равна нулю, *Лит. мат. сб.*, **1**(1–2), 109–114 (1961).
3. Э.Г. Кирьяцкий, *Многолистные функции и разделенные разности*, Техника, Вильнюс (1995).
4. L. Bieberbach, Uber einige Extremalbrobleme im Gebiete der konformenAbbildung, *Math. Annalen*, **77**, 153–172 (1916).
5. T. Gronwall, Sur la deformationdans la representationcjnforme, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **162**, 249–252 (1916).
6. L. Brabges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, LOMI preprintes, E–5–84.–S.1–21.
7. И.А. Александров, Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И.М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха, *Сибирск. матем. ж.*, **28**, 7–20 (1987).
8. И.А. Александров, *Методы геометрической теории аналитических функций*, Томский госуниверситет, Томск (2001).

REZIUMĖ

E. Kirjackis. Funkcijų iš klasės Teiloro koeficientų įverčiai

Darbe nustatomi funkcijų iš klasės $\tilde{K}_n(E)$ Teiloro eilutės koeficientų įverčiai. Minėtą klasę sudaro holomorfinės, normuotos vienetiniame skritulyje E funkcijos, kurių n-asis padalytas skirtumas nelygus nuliui.

SUMMARY

E.G. Kirjackis. On estimations of the Taylor coefficients of functions from the class $\tilde{K}_n(E)$

In the article the estimations of the Taylor coefficients of functions from class $\tilde{K}_n(E)$, formed by holomorphic in unit circle $E = \{|z| < 1\}$ functions $F(z)$, $F(0) = F^{(1)}(0) = \ldots = F^{(n-1)}(0) = 0$, $F^{(n)}(0) = n!$, which have nonvanishing n-th ae given.

Keywords: holomorphic function, univalent function, the divided difference, estimations of coefficients.