Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
62 tomas, 2021, 43–49
https://doi.org/10.15388/LMR.2021.25225

Vilnius University Press

Judėjimo su apribojimais modeliavimas

Vytautas Kleiza, Rima Šatinskaitė

Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas
Vileikos g. 8, LT-44404 Kaunas
El. paštas: vytautas.kleiza@vdu.lt; rima.satinskaite@vdu.lt

Įteiktas 2021 birželio 21; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Sudaryti judėjimo su apribojimais (judėjimo glodžia kreive) 2D ir 3D matematiniai modeliai. Modelių struktūrą sudaro netiesinės pirmos arba antros eilės diferencialinės lygtys. Ištirti laisvo judėjimo ir judėjimo su pasipriešinimu atvejai. Skaitiniais metodais gauti diferencialinių lygčių Koši uždavinio sprendiniai. Pateikti judėjimo su apribojimais taikymo pavyzdžiai, kuriuose yra svarbus tikslus įvairių judėjimo su apribojimais daugelio parametrų radimas.

Raktiniai žodžiai: matematinis modelis; netiesinė diferencialinė lygtis; apribotas judėjimas; gravitacijos jėga; energijos disipacija
AMS: 70K40

1 Įvadas

Judėjimo su apribojimais (*constrained motion*) uždavinys dažniausiai sprendžiamas arba naudojant lokalią koordinačių sistemą arba apibendrintose koordinatėse [1, 3]. Darbe šis uždavinys išspręstas inercinėje Dekarto koordinačių sistemoje, t. y. sudarytas judėjimo su stacionariais holonominiais ryšiais

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad u \in [u_1, u_2], \quad x, y, z \in C^{(1)}[u_1, u_2] \tag{1}$$

(plokščios kreivės atveju $z(u) \equiv 0$) matematinis modelis (MM) ir apskaičiuoti visi tokio judėjimo parametrai (kaip laiko funkcijos). Visur tiriamo judėjimo priežastimi yra tik gravitacijos jėga ir pradinis greitis $v_1 = v_1(u_1)$, o MM sudarytas remiantis materialaus taško (MT) pilnos energijos balansu.

2 2D Modeliai

Tegul masės m MT pradeda judėjimą kreivės L: $y = y(x)$ ($y \in C^{(1)}[x_1, x_2]$) taške $[x_1, y(x_1)]$ su pradiniu greičiu $v_1 = v_1(x_1)$ ir juda kreive L, veikiant tik gravitacijos jėgai, tada pagal energijos tvermės dėsnį potencinės $E_p = mg\,y(x) + \text{const}$ ir kinetinės $E_k = \frac{mv^2(x)}{2}$ energijos suma yra pastovi, todėl

$$mg\,y(x) + \text{const} + \frac{mv^2(x)}{2} = mg\,y_1 + \text{const} + \frac{mv_1^2}{2},$$

čia g laisvo kritimo pagreitis, taigi $v^2(x) = v_1^2 - 2g(y(x) - y_1)$, bet $y_1 = y(x_1)$, todėl

$$v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g\bigl(y(x_1) - y(x)\bigr)}. \tag{2}$$

Iš (2) seka, kad MT judančio kreive $\boldsymbol{L}$ greitis bet kuriame kreivės $\boldsymbol{L}$ taške priklauso tik nuo MT ordinačių skirtumo $y_1 - y(x)$ ir pradinio greičio v_1. Jei kreivė $\boldsymbol{L}$ apibrėžta parametrinėmis lygtimis (1) $x = x(u)$, $y = y(u)$, $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, tai

$$v(u) = \sqrt{v_1^2 + 2g\bigl[y(u_1) - y(u)\bigr]}.$$

Rasime MT judančio gravitaciniame lauke kreive $y = y(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ judėjimo lygtis. Tegul pradiniame taške $[x_1, y(x_1)]$ greitis lygus v_1, tada greitis bet kuriame taške $[x, y(x)]$ lygus

$$v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g\bigl(y_1 - y(x)\bigr)}.$$

Jei $s = s(t)$ MT nueito kelio laiko tarpe nuo $t = 0$ iki $t = t$ funkcija, tai $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$ lanko ilgio diferencialas ir $dt = \frac{ds}{v(x)}$. Tada laikas T per kurį MT judės kreive nuo taško $[x_1, y(x_1)]$ iki taško $[x, y(x)]$:

$$T = \int_{x_1}^{x} dt = \int_{x_1}^{x} \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_1}^{x} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}dx}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y(x_1) - y(x))}}. \tag{3}$$

Diferencijuodami (3) pagal x gauname MT judėjimo diferencialinę lygtį:

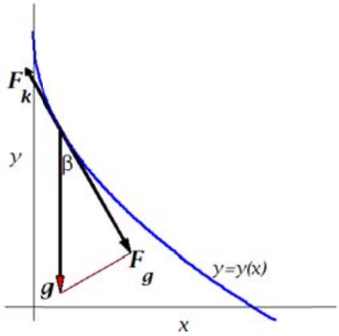
$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}}. \tag{4}$$

Gavome diferencialinę lygtį atvejams kai judėjimui su apribojimais nėra energijos disipacijos.

Tirsime judėjimą (1 pav.) kreive $y = f(x)$, kai MT su vienatine mase ($m = 1$) veikia tik gravitacijos jėga F_g o judėjimo kryptimi veikia terpės pasipriešinimo jėga $F_k = -kv$ (yra energijos disipacija). Greičių lauko radimui sudarysime diferencialinę lygtį, remiantis tuo, kad kinetinė energija E_k sunaudota pasipriešinimo jėgai įveikti laiko tarpe nuo $t = 0$ iki t lygi:

$$E_k(t) = \int_0^t F_k ds = \int_0^t kv(\tau)v(\tau)d\tau = k\int_0^t v^2(\tau)d\tau,$$

čia $ds = v(\tau)d\tau$ – nueito kelio diferencialas taške τ.



1 pav. MT veikiančios jėgos esant pasipriešinimui.

Pagal energijos tvermės dėsnį MT energija bet kuriuo laiko momentu t yra lygi MT energijai pradiniame taške minus energija sunaudota terpės pasipriešinimui nugalėti E_k, t. y.

$$mgy + \frac{mv^2}{2}\Big|_{t=t} = \left(mgy + \frac{mv^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0} - k\int_0^t v^2(\tau)d\tau.$$

Nemažinant bendrumo galime laikyti, kad $m = 1$, $v(0) = 0$, $y(0) = 0$, tada laiko momentu t

$$gy + \frac{v^2}{2} = -k\int_0^t v^2(\tau)d\tau.$$

Diferencijuojant šį reiškinį gauname greičio pasiskirstymo laike diferencialinę lygtį:

$$vv'_t + kv^2 + gy'_t = 0. \tag{5}$$

Lygtyje (5) visos funkcijos priklauso nuo laiko t, todėl $y'(t)$ yra nežinoma ir išspręsti gautą diferencialinę lygtį (t. y. rasti greičio v priklausomybę nuo laiko) negalime.

Padauginus diferencialinę lygtį (5) iš dt ir pastebėjus, kad $y'dt = dy$, $vdt = ds$, $v'dt = dv$, gauname funkcijų v, s, y diferencialų sąryšį:

$$vdv + kvds + gdy = 0. \tag{6}$$

Šis sąryšis galioja bet kurio parametro funkcijoms v, s, y. Todėl, pavyzdžiui, padalinę (6) iš dx (tada parametru tampa x) gauname greičio diferencialinę lygtį:

$$vv'_x + kv\sqrt{1 + y'^2_x} + gy'_x = 0. \tag{7}$$

Tačiau, kai $v_1 = 0$, lygtis (4) tampa išsigimusia. Tada pastebėjus, kad $vv'_x = \frac{1}{2}(v^2)'_x$ ir pakeitus greičio funkciją $v(x)$ į $w(x) = v^2(x)$, gauname jau neišsigimusią (net kai $w(x_1) = v^2(x_1) = 0$) diferencialinę lygtį funkcijai $w(x)$:

$$w'_x + 2k\sqrt{w\,(1 + y'^2_x)} + 2gy'_x = 0 \quad (v(x) = \sqrt{w(x)}). \tag{8}$$

Tai pirmos eilės netiesinė lygtis su Koši sąlyga $v(x_1) = v_1$.

3 3D Modeliai

Tegul dabar masės $m = 1$ MT juda kreive (1) veikiamas tik gravitacijos jėgos ir terpės pasipriešinimo jėgos $F_k = -kv$. Tada gravitacijos jėgos F_g poveikį judėjimui sudaro tik laisvo kritimo pagreičio $g = [0, 0, -g]^{\mathrm{T}}$ projekcija į judėjimo kryptį $\tau = [x'(u)\ y'(u)\ z'(u)]^{\mathrm{T}}$:

$$F_g = pr_\tau g = \frac{-z'_u}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}} g.$$

Judėjimo lygčių sudarymui pažymėsime $u = w(t)$, (čia $w(t)$ nežinoma funkcija, t – laikas). Funkcijos $w(t)$ radimui sudarysime diferencialinę lygtį, nes žinant $w(t)$, gauname judėjimo lygtis

$$\begin{cases} x = x(w(t)), \\ y = y(w(t)), \\ z = z(w(t)). \end{cases}$$

Judėjimas veikiamas tik jėgomis F_g, F_k, (jų veikimo kryptys kolinearios), tai sumuodami jas gauname atstojamąją jėgą F (arba pagreitį a, nes $m = 1$):

$$F = a = F_g + F_k = \frac{-gz'_u}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}} - kv.$$

Judančio taško greičio vektorių v rasime diferencijuodami judėjimo lygtis:

$$v = \big[x(w(t)), y(w(t)), z(w(t))\big]'_t = [x'_u\, w'_t, y'_u\, w'_t, z'_u\, w'_t] = [x'_u, y'_u, z'_u]w'_t,$$

tada judančio taško greičio modulis v ir pagreitis a:

$$|v| = v = \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\, w'_t,$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{(x'_u x''_u + y'_u y''_u + z'_u z''_u)\, w'^2_t + (x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u) w''_t}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}}\bigg|_{u=w(t)},$$

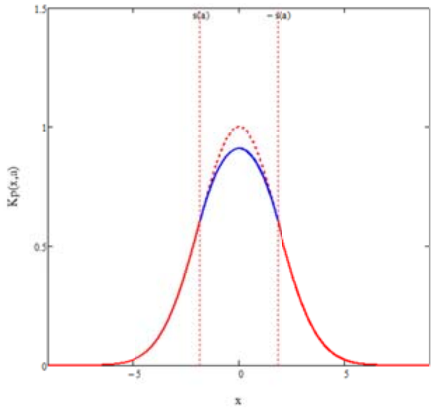
o atsižvelgus į tai, kad $a = F_g + F_k$, turime

$$\begin{aligned} &\frac{-g\, z'_u}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}} - kv\bigg|_{u=w(t)} \\ &\quad = \frac{(x'_u x''_u + y'_u y''_u + z'_u z''_u) w'^2_t + (x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u) w''_t}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}}\bigg|_{u=w(t)}. \end{aligned}$$

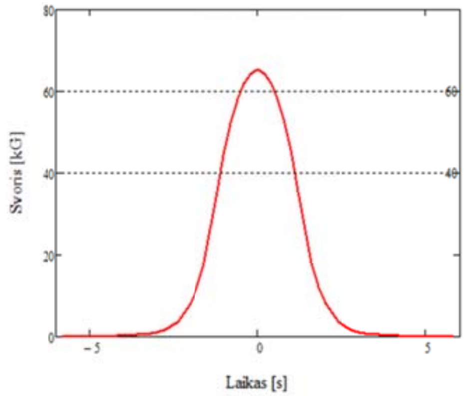
Išreiškus $w''_t(t)$ gauname diferencialinę lygtį funkcijos $w(t)$ radimui:

$$w''_t(t) = \frac{-gz'_u - k(x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u) w'_t - (x'_u x''_u + y'_u y''_u + z'_u z''_u) w'^2_t}{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\bigg|_{u=w(t)} \tag{9}$$

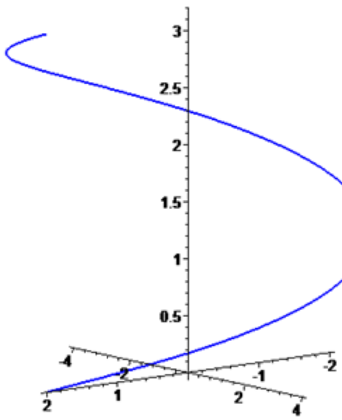
ir pradines sąlygas: $w(t_1) = u_1$ (u_1 pradinio kreivės taško parametro u reikšmė), $w'_t(t_1) = \frac{v_1}{\sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}}$ (nes $v = \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\, w'_t$, o v_1 greitis pradiniame kreivės taške).



2 pav. Keplerio parabolė (mėlyna spalva).



3 pav. 70 kg masės MT svoris judant parabole.



4 pav. Apribojanti kreivė.

4 Skaičiavimo pavyzdžiai

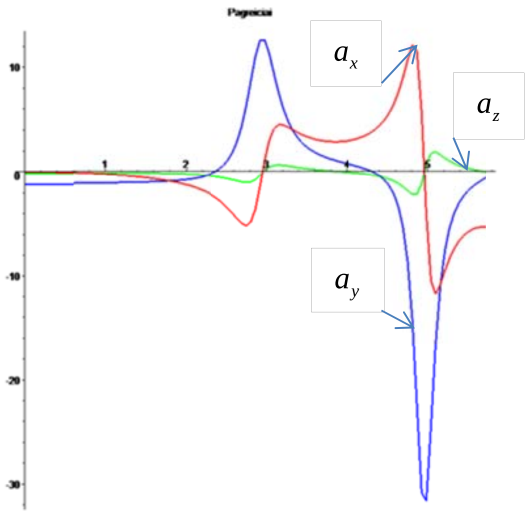
4.1 Keplerio parabolė (lėktuvo trajektorija imituojanti nesvarumą [2])

Būtina lėktuvo trajektorija (apribojanti kreivė 2 pav.) $K_p \in C^{(1)}[-\infty, \infty]$, $a > 0$:

$$K_p(x,a) = \begin{cases} \exp(-ax^2), & \text{jei } -\infty < x \leqslant s(a), \\ -b(a)x^2 + c(a), & \text{jei } s(a) < x < -s(a), \\ \exp(-ax^2), & \text{jei } -s(a) < x \leqslant +\infty, \end{cases} \qquad s(a) = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}, \tag{10}$$

$$b(a) = a\exp\bigl[-as^2(a)\bigr], \quad c(a) = b(a)\left[\frac{1}{a} + s^2(a)\right].$$

Svorio kitimas judant parabole parodytas (3 pav.).



5 pav. Pagreičio $a(t)$ dedamųjų $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ grafikai.

4.2 Judėjimas spirale elipsinio cilindro paviršiumi su pasipriešinimu

Tegul MT juda apribojančia kreive ($u = 0 \dots 2\pi$):

$$\begin{cases} x = 2\cos u, \\ y = -4\sin u, \\ z = (2\pi - u)/2, \end{cases}$$

esančioje elipsinio cilindro paviršiuje su pradiniu greičiu $v_1 = v(0) = 0$, o terpės pasipriešinimo jėga $F_k = 0.1v$ (4 pav.)

Pateiktos MT pagreičio $a(t) = [a_x(t)\ a_y(t)\ a_z(t)]^{\mathrm{T}}$ projekcijos į koordinačių ašis (5 pav.).

Visi pavyzdžiai skaičiuoti adaptyvaus žingsnio ketvirtos eilės Runges ir Kuto metodu.

Literatūra

[1] B. Bagchi. *Advanced Classical Mechanics*. CRC Press, Canada, 1998.

[2] F. Karmali, M. Shelhamer. The dynamics of parabolic flight: flight characteristics and passenger percepts. *Acta Astr.*, **63**(5–6):594–602, 2008.

[3] J.L. Meriam, L.G. Kraige. *Engineering Mechanics, Dynamics, 4th ed.* John Wiley & Sons, Inc., USA, 2017.

SUMMARY

Modeling of constrained motion

V. Kleiza, R. Šatinskaitė

This paper presents an investigation of modeling and solving of differential equations in the study of mechanical systems with holonomic constraints. The 2D and 3D mathematical models of constrained motion are made. The structure of the models consists of nonlinear first or second order differential equations. Cases of free movement and movement with resistance are investigated. Solutions of the Cauchy problem of obtained differential equations were obtained by Runge–Kutta method.

Keywords: mathematical model; nonlinear differential equation; constrained motion; gravitation force; energy dissipation