Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 93–96

Apie pseudosimetrines ir Ricci-pseudosimetrines Kartano erdves

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@vpu.lt

Abstract. Pseudosimetrinės ir Ricci-pseudosimetrinės Rymano erdvės su beveik sandaugos struktūra išnagrinėta [1] darbe. Šiame darbe minėtos sąvokos apibendrinamos Kartano erdvėms su beveik Ermito ir beveik Kelerio struktūromis. Surastos sąlygos, kad Kartano erdvė su minėtomis struktūromis būtų pseudosimetrinė ir Ricci-pseudosimetrinė.

Keywords: Kartano erdvė, tiesinė ir afinioji sietys, beveik Ermito ir beveik Kelerio struktūros, pseudosimetrinės ir Ricci-pseudosimetrinės erdvės.

Nagrinėjame n-matę Kartano erdvę C^n, kurią traktuojame kaip koliestinę sluoksniuotę T^*V^n, su apibrėžta skaliarine funkcija $H\colon T^*V^n \to R$, tenkinančia tokias sąlygas [2]:

1) funkcija H yra neneigiama visuose erdvės T^*V^n taškuose $(x^i, y_i), i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n$;
2) funkcija H yra antrojo laipsnio homogeninė funkcija kintamųjų y_i atžvilgiu;
3) funkcijos H hesiana $\det \| \frac{\partial^2 H(x^i, y_i)}{\partial y_k \partial y_h} \|$ yra nelygus nuliui visuose erdvės T^*V^n taškuose.

Jei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial^i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, tai Kartano erdvės C^n metrinį tenzorių apibrėžiame lygybe $g^{ij} = \partial^i \partial^j H$, o atvirkštinis jam tenzorius g_{ik} tenkina sąlygą $g_{ik} g^{ij} = \delta_k^j$. Jei $\gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh}(\partial_j g_{ih} + \partial_i g_{jh} - \partial_h g_{ij})$ – metrinio tenzoriaus g_{ij} Kristofelio simboliai, tai objektas $L_{ij} = \gamma_{ij}^k y_k - \frac{1}{2} \gamma_{pq}^k y_k y_h g^{hp} \partial^q g_{ik}$ yra Kartano erdvės tiesinės sieties diferencialinis-geometrinis objektas, o trejetas $(L_{ij}, \Gamma_{ij}^k = \partial^k L_{ij}, 0)$, apibrėžia Kartano erdvės Mirono afiniąją sietį [2]. Pažymėkime $\delta_i = \partial_i + L_{ik} \partial^k$, $C^{ijk} = \frac{1}{2} \partial^k g^{ij}$, $C_k^{ij} = -g_{kh} C^{ijh}$, $\Pi_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh}(\delta_j g_{ih} + \delta_i g_{jh} - \delta_h g_{ij})$. Tuomet trejetas $(L_{ij}, \Pi_{ij}^k, C_k^{ij})$ apibrėžia Kartano erdvės metrinio tipo afiniąją sietį, pasižyminčią tuo, kad metrinio tenzoriaus kovariantinės išvestinės $\nabla_k^{\Pi} g_{ij}$ šios sieties atžvilgiu yra lygios nuliui.

Pažymėjus $x^A = \delta_i^A x^i + \delta_A^{n+i} y_i, A, B, \ldots = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n$, Kartano erdvę C^n galima traktuoti kaip Rymano erdvę, kurios metrikos G_{AB} apibrėžiamos kaip metrikos g_{ij} L-liftas (žr. [4]). Jei α, β, γ – bet kokie skaičiai, su kuriais $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$, tai šios metrikos komponentės užrašomos lygybėmis

$$G_{ij} = \alpha g_{ij} - 2\beta L_{ij} + \gamma g^{pq} L_{ip} L_{qj}, \quad G_{n+i\ n+j} = \gamma g^{ij},$$

$$G_{n+ij} = G_{jn+i} = \beta\delta^i_j - \gamma g^{ik} L_{kj},$$

$$G^{ij} = \frac{\gamma g^{ij}}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad G^{n+i\ n+j} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2}(\alpha g_{ij} + 2\beta L_{ij} + \gamma g^{pq} L_{ip} L_{qj}),$$

$$G^{n+ij} = G^{jn+i} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2}(-\beta\delta^j_i + \gamma g^{kj} L_{ik}). \tag{1}$$

Afiniąją sietį Λ^C_{AB} apibrėšime, kaip įprasta, užrašę bazinių elementų $\partial_A = \frac{\partial}{\partial x^A}$ kovariantinių išvestinių išraiškas $\nabla_{\partial_A}(\partial_B) = \Lambda^C_{AB}\partial_C$. Afinioji sietis yra metrinė, jei metrinio tenzoriaus komponentės yra kovariantiškai pastovios šios sieties atžvilgiu, t.y. kai $\nabla G = 0$.

1 TEOREMA. *Afinioji sietis $\bigwedge^C_{AB}$ yra metrinė tada ir tik tada, kai jos nenulinėms komponentėms yra teisingos lygybės*

$$\Lambda^i_{jk} = -\Lambda^{n+j}_{n+ik} = \Pi^i_{jk}, \quad \Lambda^{n+i}_{jk} = -\nabla^{\Pi}_k L_{ij},$$

$$\Lambda^i_{jn+k} = -\Lambda^{n+j}_{n+in+k} = C^{ik}_j,$$

$$\Lambda^{n+i}_{jn+k} = -\Gamma^k_{ij} + L_{ip} C^{pk}_j + L_{pj} C^{pk}_i. \tag{2}$$

Kaip įrodyta [5] darbe, Kartano erdvėje C^n egzistuoja beveik kompleksinių struktūrų šeima, kurių struktūrinių tenzorių J, tenkinančių sąlygą $J^2 = -E$, komponenčių išraiškos yra tokios:

$$J^i_j = a\delta^i_j - cg^{ik} L_{kj}, \quad J^{n+i}_{n+j} = -a\delta^j_i + cg^{jk} L_{ik},$$

$$J^{n+i}_j = bg_{ij} + 2aL_{ij} - cg^{pq} L_{ip} L^{qj}, \quad J^i_{n+j} = cg^{ij}, \tag{3}$$

čia $a, b \neq 0$ – bet kurie skaičiai, o $c = \frac{-1-a^2}{b}$.

Afinioji sietis Λ^C_{AB} yra vadinama asocijuota su beveik kompleksine struktūra, jei tenzorius J yra kovariantiškai pastovus šios sieties atžvilgiu. Nesunkiai patikrinama, kad metrinė afinioji sietis (2) yra asocijuota su beveik kompleksinėmis struktūromis (3).

Sakykime, kad Kartano erdvės C^n metrika G ir beveik kompleksinė struktūra J yra susijusios lygybe $G(JX, Y) + \varepsilon G(X, JY) = 0$ bet kokiems vektoriniams laukams X ir Y, o metrinė sietis Λ^C_{AB} yra asocijuota su beveik kompleksine struktūra J (t.y. $\nabla J = 0$). Tuomet trejetas (G, Λ, J) apibrėžia Kartano erdvės beveik Ermito struktūrą (jei $\omega = -1$) ir beveik Kelerio struktūrą (jei $\omega = 1$) (žr. [3]).

2 TEOREMA. *Kartano erdvėse egzistuoja vidinės triparametrinės beveik Kelerio struktūrų šeimos ir vidinės beveik Ermito struktūrų šeimos, priklausančios nuo 4 parametrų.*

Beveik Kelerio struktūros struktūrinio tenzoriaus J komponentės užrašomos (3) lygybėmis, kuriose $a = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}$, $b = -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}$, $c = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}$, o α, β, γ – bet kokie skaičiai, su kuriais $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$. Beveik Ermito struktūros atveju tenzoriaus J komponenčių išraiškose (3) α ir b – bet kokie nelygūs nuliui skaičiai, β ir γ – bet kokie skaičiai, kuriems teisinga nelygybė $D = b^2(\beta^2 + \alpha\gamma) + \alpha^2 \geqslant 0$, o $a = \alpha^{-1}(b\beta \pm \sqrt{D})$, $c = -\alpha^{-2}b^{-1}(2\alpha^2 + 2b^2\beta^2 + b^2\alpha\gamma - 2b\beta\sqrt{D})$.

Kaip žinome, afiniosios sieties Λ^C_{AB} kreivumo tenzoriai R^D_{ABC} ir R_{ABCD}, o taip pat Ricci tenzorius, apibrėžiami tokiomis lygybėmis:

$$R^D_{ABC} = \delta_B \Lambda^D_{AC} - \delta_C \Lambda^D_{AB} + \Lambda^E_{AC}\Lambda^D_{EB} - \Lambda^E_{AB}\Lambda^D_{EC},$$
$$R_{ABCD} = R^E_{BCD} G_{EA}, \quad S_{AB} = R^C_{ABC}. \tag{4}$$

Apibrėžkime tenzorius $R \cdot R$ ir $R \cdot S$ (žr. [1]):

$$R \cdot R_{ABCDEF} = -R^H_{ABC}(R_{HDEF} + R_{DHEF} + R_{DEHF} + R_{DEFH}),$$
$$R \cdot S_{ABCD} = -R^H_{ABC}(S_{HD} + S_{DH}). \tag{5}$$

Kartano erdvė C^n vadinama pseudosimetrine, jei $R \cdot R = 0$, o Ricci – pseudosimetrine, jei $R \cdot S = 0$ ([1]).

3 TEOREMA. *Kartano erdvė su beveik Kelerio struktūra* (*beveik Ermito struktūra*) *yra pseudosimetrinė, jei tiesinė sietis L_{ij} ir afinioji sietis Π^k_{ij} yra plokščios, o tenzoriui C^{ij}_k yra teisingos lygybės*

$$C^{k[p}_i C^{q]k}_j = 0, \quad \delta^i_p C^{kh}_j C^{lm}_k + C^{hm}_j C^{il}_p = 0. \tag{6}$$

4 TEOREMA. *Kartano erdvė su beveik Kelerio struktūra* (*beveik Ermito struktūra*) *yra Ricci-pseudosimetrinė, jei afinioji sietis Π^k_{ij} yra plokščia, o tenzoriui C^{ijk} yra teisingos* (6) *lygybės.*

IŠVADA. *Jei Kartano erdvė su beveik Ermito struktūra* (*beveik Kelerio struktūra*) *yra Ricci-pseudosimetrinė, tai ji yra ir pseudosimetrinė.*

Literatūra

1. D. Luczyszyn, On Pseudosymmetric Para-Kählerian Manifolds, *Beitrage zur Algebra und Geometry*, **44**(2), 551–558 (2003).
2. R. Miron, Cartan Spaces, *Mem. Sci. Stint. Acad. Repub. Soc. Romania*, *Ser. IV*, **9**(1), 25–46 (1989).
3. K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World. Sci. Publ. Co. Singapore (1984).
4. E. Mazėtis, Apie Kartano erdvių geometriją, *Liet. matem. rink.*, **38**(2), 221–233 (1998) (rusų k.).
5. E. Mazėtis, Apie Kartano erdvių vidines tenzorines struktūras, *Liet. matem. rink.*, **40**(2), 190–200 (2000) (rusų k.).

SUMMARY

E. Mazėtis. Zur pseudosymmetrische und Ricci-pseudosymmetrische Kartanische Ra̋umen

In dieser Arbeit sind die Kartanische Ra̋umen mit komplexe Strukturen untersucht. In diesen Ra̋umen exissieren die innere pseudo-Ka̋hlere und pseudo-Hermitan Strukture. Man findet Bedingungen, mit welchen die Kartanische Ra̋umen mit diesen Strukture pseudosymmetrisch und Ricci-pseudosymmetrisch sind.

Keywords: pseudosymmetrische und Ricci-pseudosymmetrische Kartanische Räumen, lineare und affine Zusammenhänge, Hermitan und Kählere Strukture.