*Liet. matem. rink,* **47**, *spec. nr.,* 2007, 453–456

# Kombinatoriniai diskrečiųjų procesų optimizavimo uždaviniai

Nijolė JANUŠAUSKAITĖ (KTU)
el. paštas: nijole.janusauskaite@ktu.lt

Diskretieji valdymo procesai yra svarbi optimaliojo valdymo teorijos bei praktikos sudėtinė dalis. Daugelis faktorių lemia tai, kad diskrečiųjų sistemų optimaliojo valdymo problemoms skiriamas ypatingas dėmesys. Pirmiausia, diskrečiomis sistemomis apibūdinami daugelis dinaminių ekonomikos, transporto, medicinos, finansų aptarnavimo ir pan. modelių. Kita vertus, sprendžiant praktinius uždavinius daugelyje atvejų jie diskretizuojami. Tai leidžia šiuos uždavinius spręsti taikant skaitinius kompiuterinius metodus.

Šiame darbe spręsime kombinatorinį diskrečiųjų procesų optimizavimo uždavinį, kuris nepriklauso klasikinių diskrečiųjų valdymo uždavinių klasei. Nauja yra tai, kad valdomos diskrečiosios sistemos būsena apibūdinama skirtingomis trajektorijomis, kurios susietos su valdymo strategijos parinkimu. Pakeitus valdymą, keičiasi sistemos būseną aprašančių lygčių skaičius. Šia prasme uždavinys ir yra vadinamas kombinatoriniu.

Nagrinėsime diskrečiųjų procesų optimizavimo uždavinį:

$$\sum_{t=0}^{N-1} g_0\left(x\left(t\right), t\right) \to \min, \tag{1}$$

$$x_i\left(t+1\right) = f_i\left(x\left(t\right), t\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M\left(t\right), \ 0 \leqslant M\left(t\right) \leqslant M, \ t = \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

$$x_i(t+1) = x_i(t), \quad i = M(t)+1, \dots, M, \tag{3}$$

su pradinėmis sąlygomis

$$x_i\left(0\right) = x_i^0. \tag{4}$$

Funkcijos $g_0$, $f_i$ bei jų dalinės išvestinės yra tolydžios funkcijos, $x_i^0$, $i = \overline{0, M}$, $M -$ fiksuoti skaičiai.

(1)–(4) uždavinio sprendimui taikysime dinaminio programavimo metodą bei Pontriagino maksimumo principą. Tam tikslui (1)–(4) uždavinį pertvarkysime į naują optimizavimo uždavinį, kuris prie tam tikrų sąlygų yra ekvivalentus duotajam. Toliau apibūdinsime naująjį optimizavimo uždavinį. Pirmiausia apibrėšime naują trajektoriją:

$$\overline{x}_i\left(t+1\right) = \lambda_i\left(t\right) \overline{x}_i\left(t\right) + \left(1 - \lambda_i\left(t\right)\right) f_i\left(\overline{x}\left(t\right), t\right), \quad \lambda_i\left(t\right) \in [0; 1], \ i = \overline{0, M}. \tag{5}$$

Nesunku patikrinti, kad iš (5) išplaukia (2), kai $\lambda_i(t) = 0$, kai $i = 0, 1, \ldots,\ 0 \leqslant M(t) \leqslant M$.

Parinkę $\lambda_i(t) = 1$, (5) lygtį galime pakeisti (3), kai $i = M(t) + 1, \ldots, M$.

Pažymėkime $\overline{x} = (\overline{x}_0(t); \ldots; \overline{x}_M(t))^T$, $f = (f_0; \ldots; f_M)^T$, $u = (u_0(t); \ldots; u_M(t))^T$, $u_i(t) = \lambda_i(t) \in [0, 1]$; čia simbolis $T$ reiškia transponavimo operaciją.

Tuomet (2) ir (3) lygtis galime apjungti ir užrašyti jas taip:

$$\overline{x}(t+1) = u^T(t) A \overline{x}(t) + u^T(t) A f(\overline{x}(t), t) + f(\overline{x}(t), t); \tag{6}$$

čia $A$ – trimatė matrica, kuri tenkina sąlygą

$$u^T(t) A = \begin{bmatrix} \lambda_0(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_M(t) \end{bmatrix}.$$

Pažymėkime

$$u^T(t) A \overline{x}(t) + u^T(t) A f(\overline{x}(t), t) + f(\overline{x}(t), t) = g(\overline{x}(t), u(t), t).$$

Taigi sudarėme naująjį optimizavimo uždavinį

$$\sum_{t=0}^{N-1} g_0(\overline{x}(t), t) \to \min_{u \in U}, \tag{7}$$

$$\overline{x}(t+1) = g(\overline{x}(t), u(t), t), \quad t = \overline{1, N-1}, \tag{8}$$

$$\overline{x}(0) = x^0,\ x^0 = (x_0^0; \ldots; x_M^0), \tag{9}$$

$$u(t) \in U, U = \left\{ \lambda_i(t) \,\middle|\, 0 \le \lambda_i(t) \leqslant 1,\ i = \overline{0, M} \right\}, \tag{10}$$

kuris ekvivalentus (1)–(4), kai $\lambda_i(t) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, M(t)$, $\lambda_i(t) = 1$, $i = M(t) + 1, \ldots, M$.

Dabar tarkime, kad $M(t)$, $0 \leqslant M(t) \leqslant M$, $t = \overline{0, N-1}$ įgyja panariui visas galimas reikšmes nuo 0 iki $M$.

Įrodysime teoremą, kuri apibūdina optimaliojo valdymo struktūrą.

1 TEOREMA. *Jei valdymas $u(t)$ apibrėžiamas formule*

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } i = 0, 1, \ldots, M(t), \\ 1, & \text{kai } i = M(t) + 1, \ldots, M, \end{cases} \tag{11}$$

*ir tinka Belmano lygčiai*

$$B(\overline{x}(t), t) = \min_{u \in U} \left[ g_0(\overline{x}(t), t) + B(g(\overline{x}(t), \overline{u}(t), t), t+1) \right], \quad t = \overline{0, N-1},$$

*su kraštine sąlyga*

$$B(\overline{x}, N-1) = g_0(\overline{x}, N-1),$$

*tuomet* (11) *valdymas yra* (1)–(4) *uždavinio optimalus valdymas.*

*Įrodymas*. Teoremos įrodymui taikysime dinaminio programavimo metodą. Pagal teoremos sąlygą (11) valdymas tenkina Belmano lygtį, todėl jis yra (7)–(10) uždavinio optimaliuoju valdymu. Kadangi (1)–(4) uždavinys yra (7)–(10) atskiras atvejis, tai (11) valdymas yra ir (1)–(4) uždavinio optimaliuoju valdymu.

Teorema įrodyta.

Išnagrinėsime dabar bendrąjį atvejį, kai (1)–(4) sistemos faziniai kintamieji nėra sunumeruoti eilės tvarka. Tam išspręsime dar vieną kombinatorinį optimizavimo uždavinį:

$$\sum_{t=0}^{N-1} g_0\left(x\left(t\right), t\right) \to \min, \tag{12}$$

$$x_i\left(t+1\right) = f_i\left(x\left(t\right), t\right), \quad i \in I\left(t\right) = \left\{i_0, i_1, \dots, i_{M(t)}\right\}; \tag{13}$$

$$I\left(t\right) \subset \left\{0, 1, \dots, M\right\}, \quad 0 \leqslant M\left(t\right) \leqslant M, \ t = \overline{0, N-1}.$$

$$x_i\left(t+1\right) = x_i\left(t\right), i \bar{\in} I\left(t\right), \tag{14}$$

$$x_i\left(0\right) = x_i^0, \quad i = \overline{0, M}. \tag{15}$$

Pažymėkime $x_i(t+1) = \lambda_i(t) x_i(t) - (1-\lambda_i(t)) f(x(t), t)$; čia $\lambda_i(t) \in [0; 1]$, $f = (f_0, \dots, f_M)$, $u = (u_0(t), \dots, u_M(t))$.

Analogiškai samprotaudami, kaip ir pertvarkant (2)–(3) lygčių išraiškas, (13)–(14) lygtis apjungsime į vieną visumą.

Gausime

$$\begin{aligned}
&x_i(t+1) = \lambda_i(t) x_i(t) - (1-\lambda_i(t)) f(x(t), t), \quad x_i(t) \in [0; 1],\\
&x\left(t+1\right) = u^T\left(t\right) Ax\left(t\right) + u^T\left(t\right) Af\left(x\left(t\right), t\right) + f\left(x\left(t\right), t\right)\\
&\quad = u^T\left(t\right) Ah\left(x\left(t\right), t\right) + f\left(x\left(t\right), t\right), \quad t = \overline{0, N-1},\\
&h\left(x\left(t\right), t\right) = f\left(x\left(t\right), t\right) + x\left(t\right).
\end{aligned}$$

Taigi (12)–(15) kombinatorinį optimizavimo uždavinį pertvarkėme į klasikinį diskrečiųjų sistemų optimizavimo uždavinį:

$$\sum_{t=0}^{N-1} g_0\left(x\left(t\right), t\right) \to \min, \tag{16}$$

$$x\left(t+1\right) = u^T\left(t\right) Ah\left(x\left(t\right), t\right) + f\left(x\left(t\right), t\right), \tag{17}$$

$$x(0) = x^0, \quad x^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_M^0). \tag{18}$$

2 TEOREMA. *Sakykime valdymas* $u^0 = (u_0^0(t), \dots, u_M^0(t))^T$, $t = \overline{0, N-1}$ *tinka Belmano lygčiai:*

$$B\left(x\left(t\right), t\right) = \min_{u \in U}\left[g_0\left(x\left(t\right), t\right) + B\left(x\left(t+1\right), t+1\right)\right],$$

*su kraštine sąlyga*

$$B\,(x, N-1) = g_0\,(x\,(t)\,, t)$$

*ir išpildoma sąlyga*

$$\psi^T\,(t+1)\,h\,(x\,(t)\,, t) \neq 0, \quad \forall t \in \overline{0, N-1}; \tag{19}$$

*čia*

$$\begin{aligned} &\psi\,(t) = \frac{\partial H\,(x\,(t)\,, \psi\,(t)\,, u\,(t)\,, t)}{\partial x}, \\ &H\,(x, \psi, u, t) = g_0\,(x\,(t)\,, t) + \psi^T\,(t+1)\Big(f\,(x\,(t)\,, t) + u^T\,(t)\,Ah\,(x\,(t)\,, t)\Big), \\ &\quad t = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \tag{20}$$

*tuomet aibės $I\,(t)$elementais yra $i_s$, kuriems* $u^0_{i_s}(t) = \lambda_{i_s}(t) = 0$.

*Įrodymas.* Teoremos įrodymui taikysime maksimumo principą. Pagal teoremą sąlygos valdymas $u^0(t)$ tenkina Belmano lygtį, todėl jis yra (16)–(18) uždavinio optimaliuoju valdymu. Remiantis maksimumo principu, galime teigti, kad optimalus valdymas $u^0(t)$ ir jį atitinkanti trajektorija $x^0(t)$ tenkina ir maksimumo sąlygą:

$$H\left(x^0\,(t)\,, \psi^0\,(t)\,, u^0\,(t)\,, t\right) = \max_{u \in U} H\left(x^0\,(t)\,, \psi^0\,(t)\,, u\,, t\right), \quad t \in \overline{0, N-1}.$$

Kadangi (20) Hamiltono funkcija yra tiesinė u atžvilgiu ir teisinga (19) nelygybė, tai optimalusis valdymas įgyja dvi reikšmes 0 arba 1. Iš to anksčiau minėto ryšio tarp (12)–(15) ir (16)–(18) uždavinių išplaukia teoremos tvirtinimas.

Teorema įrodyta.

Reziumuojant darbe gautus rezultatus galima teigti, kad buvo suformuluoti nauji neklasikiniai diskretieji optimizavimo uždaviniai. Buvo sukurta metodika, kaip šiuos uždavinius pertvarkyti į tipinius optimizavimo uždavinius, kurie jau išsprendžiami dinaminio programavimo ir maksimumo principo metodais.

## Literatūra

1. N.R. Janušauskaitė, Diskrete maximum principe in the Bolza problem with a distributed control, *Lith. Math. J.*, **36**(1), 17–21 (1996).
2. N.R. Janušauskaitė, Daugiažingsnio Bolco tipo optimaliojo valdymo uždavinio sprendimas dinaminio programavimo metodu, *Matematika ir matematinis modeliavimas*, Kauno technologijos universitetas, Kaunas, **1**, 31–33 (2005).

SUMMARY

***Nijolė Janušauskaitė. The combinatorial optimization problems of the discrete processes***

Nonclassic combinatorial optimization problems of the discrete processes are investigated. The methodology, permitting transform there problems into equivalent typical problems, which can be solved applying dynamic programming and principle of the maximum methods, is proposed.

*Keywords:* dynamic programming, optimal control, maximum principle.