Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.*, 2007, 37–41

Daugiamatė lokalioji teorema Knopfmacherio pusgrupėje

Rimantas SKRABUTĖNAS (VPU)
el. paštas: rimantas.skrabutenas@vpu.lt

Reziumė. Straipsnyje H. Delange metodu įrodyta lokalioji daugiamatė ribinė teorema adityviosioms funkcijoms, apibrėžtoms J. Knopfmacherio pusgrupėje.

Raktiniai žodžiai: aritmetinė funkcija, lokalieji skirstiniai, Knopfmacherio pusgrupė.

Lokaliųjų skirstinių J. Knopmacherio pusgrupėje tyrinėjimams įžangą davė J. Kubiliaus [1] straipsnyje įrodytos ribinės lokaliosios teoremos aritmetinėms funkcijoms, apibrėžtoms natūraliųjų skaičių pusgrupėje, bei išsamūs E. Manstavičiaus, K. Indlekoferio ir kitų autorių atlikti tokios pusgrupės aritmetinių savybių ir ypatumų tyrimai (žr. pvz., [6]). Knopfmacherio pusgrupės detalesnį apibrėžimą galima rasti darbuose [3, 4].

Visų teoremų, įrodytų šiuose darbuose, formuluotės panašios kaip ir natūraliųjų skaičių pusgrupės atveju, bet rezultatų išraiška bei įrodymo keliai turi ir specifinių bruožų, išplaukiančių iš pusgrupės G savybių.

Šiame straipsnyje H. Delange metodu įrodysime daugiamatę lokaliąją teoremą adityviosioms funkcijoms apibrėžtoms tokioje pusgrupėje. Gautas rezultatas yra tam tikra darbo [5] analogija su minėtais specifiniais momentais.

Trumpai priminsime, kad:

adicinė aritmetinė pusgrupė G yra laisvoji komutatyvi pusgrupė (su vienetiniu elementu), kurią generuoja skaiti pirminių elementų p aibė P, be to, aibėje G yra apibrėžta tokia visiškai adityvi *laipsnio funkcija* δ: $G \to N \cup \{0\}$, kad $\delta(p) \geqslant 1$ su kiekvienu $p \in P$. Tarkime, kad galioja aksioma A.

AKSIOMA A. *Egzistuoja tokios konstantos* $A > 0$, $q > 1$ ir $0 \leqslant \upsilon < 1$, *kad*

$$G(n) := Card\Big\{a \in G;\ \delta(a) = n\Big\} = Aq^n + \mathrm{O}(q^{\nu n}).$$

Klasikinis pusgrupės G pavyzdys yra polinomų f virš baigtinės charakteristikos lauko L_p multiplikacinė grupė $(L_p[x], \cdot)$; tuokart $\delta(f) := deg f$.

Tirsime klasę aritmetinių adityviųjų funkcijų f_i: $G \to N_0, i = 1 \div r$, tenkinančių tokias lokalaus pasiskirstymo pusgrupės G pirminių elementų aibėje P sąlygas: *su visais galimais* $k(j) \in N_0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, pažymėjus

$$\sum_{\substack{p\in P,\delta(p)=l,\\ f_j(p)=k(j)}} g_{j+1}(p)\dots g_r(p)$$
$$= \lambda_{k(j),j} \sum_{p\in P,\delta(p)=l} g_{j+1}(p)\dots g_r(p) + \rho_{k(j),j}(l), \quad l \geqslant 1, \tag{1}$$

tarsime, kad liekamieji nariai $\rho_{k(j),j}(l)$ su konstanta $\alpha > 0$ ir su visais $k(j)$ bei j tenkina

$$\left|\rho_{k(j),j}(l)\right| \leqslant \pi(l) C_{k(j),j}(l) l^{-\alpha}, \tag{2}$$

o eilutės

$$\sum_{k(j)} z_j^{k(j)} \lambda_{k(j),j}, \quad \sum_{k(j)} \left|z_j^{k(j)}\right| C_{k(j),j}(l)$$

konverguoja (pastaroji tolygiai su visais $l \geqslant 1$). Simboliu $\pi(l)$ žymėsime skaičių pusgrupės G pirminių elementų p, kuriems $\delta(p) := l$.

Čia $N_0 := N \cup \{0\}$; $g_j(p) := z_j^{f_j(p)}$ su nenuliniais kompleksiniais skaičiais z_j; konstantos $\lambda_{k(j),j} \in [0,1]$.

Tarkime, be to, kad funkcijos f_i: $G \to N_0, i = 1 \div r$ tenkina įprastas aprėžtumo sąlygas: su visais $p \in P, \quad |f_i(p)| \leqslant const, i = 1 \div r$, o eilutė

$$\sum_{p,k\geqslant 2} \left|\prod_{j=1}^{p} g_j(p^k)\right| p^{-k\beta} \tag{3}$$

konverguoja su $0 < \beta < 1$.

Pastebėsime, kad čia nesiekiame optimizuoti nei liekamųjų narių nykimo greičio, postuluojamo (2) nelygybėmis, nei (3) aprėžtumo sąlygų, t.y. tas sąlygas galima susilpninti kaip tai buvo daroma [3, 4] ir kituose darbuose.

TEOREMA. *Tarkime $f_1(m), f_2(m), \dots, f_r(m)$ yra adityviosios funkcijos, apibrėžtos pusgrupėje G ir tenkinančios* (2)–(3) *sąlygas. Tada su kiekvienu fiksuotu rinkiniu $\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r), \quad \vartheta_j \in N_0,\ j = 1$, egzistuoja tokie nedidesnio kaip $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_r$ laipsnio polinomai $P(\Theta, u)$* ir *$Q(\Theta, u)$, su kuriais, kai $n \to \infty$, yra teisinga asimptotinė formulė*

$$\begin{aligned}
&\nu_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r)\\
&\quad := \frac{1}{Aq^n} Card\left\{a \in G;\ \delta(a) = n,\ f_1(a) = \vartheta_1, f_2(a) = \vartheta_2, \dots, f_r(a) = \vartheta_r\right\}\\
&\quad = \frac{P(\Theta, \log n)}{n^{1-h}} + I(G)(-1)^n \frac{Q(\Theta, \log n)}{n^{1-h}} + R(n).
\end{aligned}$$

Čia $h = \lambda_{01}\lambda_{02}\dots\lambda_{0r}$, $I(G)$ yra pusgrupės G tipo indikatorius, o

$$R(n) = \mathrm{O}\left(\max(n^{-1+h}, n^{-\tilde\alpha})\right), \quad \tilde\alpha = \tilde\alpha(\alpha) > 0.$$

Įrodymo žingsniai. Pirmiausia parodome, kad multiplikatyvioji funkcija

$$g(a) = g_1(a)g_2(a)\dots g_r(a), \quad a \in G,$$

tenkina [3] darbe įrodytos 1 teoremos sąlygas. Iš tikrųjų, remiantis (1) sąlygomis,

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in P,\delta(p)=l} g_1(p)g_2(p)\dots g_r(p) &= \sum_{k(1)} z_1^{k(1)} \sum_{\substack{p\in P,\delta(p)=l,\\ f_1(p)=k(1)}} g_2(p)g_3(p)\dots g_r(p)\\
&= \sum_{k(1)} z_1^{k(1)}\lambda_{k(1),1} \sum_{\substack{p\in P,\delta(p)=l,\\ f_1(p)=k(l)}} g_2(p)g_3(p)\dots g_r(p) + \sum_{k(1)} z_1^{k(1)}\lambda_{k(1),1}\rho_{k(1),1}(l)\\
&= \pi(l)\sum_{k(1)} z_1^{k(1)}\lambda_{k(1),1}\sum_{k(2)} z_2^{k(2)}\lambda_{k(1),2}\dots\sum_{k(r)} z_r^{k(r)}\lambda_{k(r),r} + \rho(l)\\
&= \pi(l)\bigl(\chi + \rho(l)\bigr). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Čia

$$\chi := \sum_{k(j)}\prod_{j=1}^{r} z_j^{k(j)}\lambda_{k(j),j} =: h + \sum_{k(j)\neq 0}\prod_{j=1}^{r} z_j^{k(j)}\lambda_{k(j),j},$$

o $\rho(l) = O(l^{-\alpha_1})$, su $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha) > 0$.

Taigi, funkcijai $g(a) = g_1(a)g_2(a)\dots g_r(a)$ galima taikyti minėtą fundamentaliąją teoremą iš [3], apie multiplikatyviųjų funkcijų reikšmių sumavimą pusgrupėje G. Todėl, teisinga

LEMA. *Jei funkcija $g(a) := g_1(a)g_2(a)\dots g_r(a)$ tenkina* (2)–(3) *sąlygas, tai, kai $n\to\infty$, yra teisinga asimptotinė formulė*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Aq^n}\sum_{a\in G,\delta(a)=n} g(a) &= \frac{(An)^{\chi-1}}{\Gamma(\chi)}\prod_{p\in P}\Bigl(1-\frac{1}{\|p\|}\Bigr)^{\chi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{g(p)^j}{\|p\|^j}\\
&\quad + I(G)\frac{(-1)^n A_1^{\chi} n^{-\chi-1}}{A\Gamma(-\chi)}\prod_{p\in P}\Bigl(1-\frac{(-1)^{\delta(p)}}{\|p\|}\Bigr)^{\chi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j\delta(p)}g(p^j)}{\|p\|^j} + \mathrm{O}(n^{-\alpha}).
\end{aligned}$$

su $\alpha > 0$. Čia $\Gamma(z)$ yra Oilerio gamma funkcija, $Z(y)$ yra Riemano dzeta funkcijos analogas pusgrupėje G:

$$Z(y) = \sum_{n\in Z_0} G(n)y^n,$$

$A_1 := Z^{'}(-q^{-1})q^{-1} \neq 0$, $\| a \| := q^{\delta(a)}$.

Dabar taikome H. Delange [5] metodą. Matome, kad tiriamasis dydis

$$\frac{1}{Aq^n}Card\bigl\{a\in G;\ \delta(a)=n,\ f_1(a)=\vartheta_1,\, f_2(a)=\vartheta_2,\dots,f_r(a)=\vartheta_r\bigr\}$$

yra daugianario nuo r kintamųjų $z_1, z_2, \ldots, z_r$

$$\frac{1}{Aq^n} \sum_{\alpha\in G, \delta(\alpha)=n, f_i=k_i} z_1^{k_1}, z_2^{k_2}, \ldots, z_r^{k_r}$$

koeficientas prie nario $z_1^{\vartheta_1}, z_2^{\vartheta_2}, \ldots, z_r^{\vartheta_r}$. Akivaizdu, kad ir χ yra daugianaris nuo tų pačių kintamųjų. Toliau abu pagrindinius narius skleidžiame Teiloro eilutėmis nulinio taško aplinkoje.

Pirmiausia, turime skleidinius

$$(An)^{\chi} = \exp\bigl\{\chi \log(An)\bigr\} = \sum_j \frac{(\log A + \log n)^j}{j!}\chi^j,$$

$$(A_1^{-1}n)^{-\chi} = \exp\bigl\{-\chi \log(A_1^{-1}n)\bigr\} = \sum_j \frac{(-\log A_1 + \log n)^j}{j!}\chi^j.$$

Funkcija $\Gamma^{-1}(z)$ yra sveikoji, todėl išskleidžiama z , taigi ir $z_1, z_2, \ldots, z_r$ laipsniais ir kai $z = \chi$, ir kai $z = -\chi$. Pagal Vejerštraso teoremą, pagrindiniuose nariuose išskirtos begalinės sandaugos yra analizinės ir aprėžtos kintamųjų $z_1, z_2, \ldots, z_r$ funkcijos tam tikroje baigtinėje nulinio taško aplinkoje, nes remiantis sąlygomis (2)–(3), yra mažoruojamos absoliučiai konverguojančiomis sumomis ir sandaugomis.

Pavyzdžiui, pirmojo iš lemoje pateiktos asimptotinės formulės pagrindinių narių koeficientas

$$a(z_1, z_2, \ldots, z_r) := \prod_{p\in P}\Bigl(1 - \frac{1}{\|p\|}\Bigr)^{\chi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g(p^j)}{\|p\|^j}$$

remiantis Niutono binomo formule, užrašomas taip:

$$a(z_1, z_2, \ldots, z_r) := \prod_{p\in P}\Biggl(1 + \frac{g(p)1-\chi}{\|p\|} + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{g(p^j}{\|p\|^j} + \sum_{j=2}^{\infty}\binom{\chi}{j}\frac{(-1)^j}{\|p\|^j} + \cdots\Biggr).$$

Pakankamai dideliems p, $p > p_0$ tradiciniu metodu galima išskirti daugiklį

$$\exp\Bigl\{\sum_{p>p_0}\frac{g(p)-\chi}{\|p\|}\Bigr\},$$

kurio analiziškumas išplaukia iš (4) sąryšio. Likę nariai eksponentiniame užraše yra palyginami su absoliučiai konverguojančia eilute

$$\sum_{p>p_0}\frac{1}{\|p\|^{1+\varepsilon}}$$

su $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$.

Todėl šis koeficientas išskleidžiamos Teiloro eilute kintamųjų $z_1, z_2, \ldots, z_r$ laipsniais. Panašiai samprotaujame ir kalbėdami apie antrojo pagrindinio nario koeficientą

$$I(G)\prod_{p\in P}\left(1-\frac{(-1)^{j\delta(p)}}{\|p\|}\right)^{\chi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j\delta(p)}g(p^j)}{\|p\|^j}.$$

Visi gautų skleidinių koeficientai tenkina Košy nelygybes, todėl, surinkę koeficientus prie nario $z_1^{\vartheta_1}, z_2^{\vartheta_2}, \ldots, z_r^{\vartheta_r}$, ir gauname teoremos įrodymą.

Literatūra

1. J. Kubilius, On local theorems for number-theoretic functions, in: *Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis*. Zur Errinerung an E. Landau (1877–1938), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1968), pp. 175–191.
2. H. Delange, Sur des formules de Atle Selberg, *Acta Arithmetica*, **19**, 105–146 (1971).
3. E. Manstavičius, R. Skrabutėnas, Summation of the values of multiplicative functions on semigroups, *Lith. Math. J.*, **33**(3), 330–340 (1993) (in Russian).
4. R. Skrabutėnas, Local distributions of arithmetic functions on semigroups, in: A. Laurinčikas *et al.* (Eds.), *Analytic and Probabilistic Number Theory*, *New Trends in Probab. and Statist.*, TEV, Vilnius/VSP Utrecht (1997), pp. 363–370.
5. R. Skrabutėnas, Daugiamatė ribinė lokalioji teorema adityviosioms aritmetinėms funkcijoms, rinkinyje: *Analizinės skaičių teorijos ir jos taikymų problemos*, Vilnius (1974), pp. 233–234.
6. K.-H. Indlekofer, E. Manstavičius, Additive and multiplikative functions on arithmetical semigroups, *Publications Mathematicae*, **45**, 1–17 (1994).

SUMMARY

R. Skrabutėnas. Multidimensional local theorem in the Knopfmachers semigroup

In the present paper a multidimensional local theorem for arithmetic functions defined in the Knopfmachers semigroup G is obtained.

Keywords: arithmetic function, local distributions, Knopfmachers semigroup.