Liet. mat. rink. LMD darbai, **48/49**, 2008, 245–251

Skirstinių aproksimavimo eksponentiniais mišiniais taikymas aptarnavimo sistemoms modeliuoti

Mindaugas ŠNIPAS, Eimutis VALAKEVIČIUS (KTU)
el. paštas: m.snipasl@stud.ktu.lt, eimval@fmf.ktu.lt

Reziumė. Straipsnyje pateikta metodika modeliuoti ne Markovo aptarnavimo sistemas, panaudojant analizinę-skaitinę modeliavimo priemonę. Metodika remiasi tuo, kad neeksponentiniai skirstiniai yra aproksimuojami eksponentinių skirstinių sąsūkomis ir mišiniais. Sistemos funkcionavimas aprašomas tolydaus laiko Markovo grandinėmis. Sistemos G/G/1 analizinio-skaitinio modeliavimo rezultatai palyginti su imitacinio modeliavimo rezultatais, atliktais su modeliavimo sistema ARENA.

Raktiniai žodžiai: aptarnavimo sistema, skirstinių aproksimavimas, tolydaus laiko Markovo grandinės, analizinis-skaitinis modeliavimas.

1. Įvadas

Viena iš sričių, kurioje plačiai taikomi Markovo procesai ir grandinės, yra aptarnavimo sistemos. Aptarnavimo sistemas M/G/1 ar G/M/1 galima tirti analitiškai, tačiau net ir šių sistemų analitinis tyrimas gali būti komplikuotas, kai pasiskirstymo funkcija G turi sudėtingą analizinę išraišką. Pavyzdžiui, aptarnavimo sistema G/G/1 neturi tikslių analizinio sprendimo metodų. Šiame straipsnyje pateikiamas G/G/1 sistemos modeliavimo metodas, taikant pasiskirstymo funkcijų G aproksimavimą eksponentinių skirstinių mišiniais.

Modeliuojant stochastines sistemas tolydaus laiko Markovo procesais su skaičia būsenų aibe reikalaujama, kad perėjimo trukmės iš vienos būsenos į kitą būtų pasiskirsčiusios pagal eksponentinį dėsnį. Realiose sistemose ši sąlyga dažnai nebūna išpildyta, ir tai apsunkina sistemų tyrimą, kadangi negalima taikyti Markovo procesų teorijos. Šiame straipsnyje nagrinėjamas teigiamas reikšmes įgyjančių skirstinių aproksimavimas eksponentinių skirstinių sąsūkomis ir mišiniais. Naudojant fiktyvių fazių metodą [2, 3], ne Markovo aptarnavimo sistemos modelį galima aproksimuoti Markovo modeliu. Tam yra panaudotas analizinis-skaitinis modeliavimo metodas.

Matematiniams modeliams sudaryti ir tirti sukurta matematinė įranga C++ kalboje, kuri leidžia automatizuoti kai kuriuos modelių sudarymo etapus: pagal sistemos aprašymą įvykių kalboje [1] generuoja visas galimas Markovo proceso būsenas, perėjimo intensyvumų tarp būsenų matricą, sudaro Kolmogorovo lygčių sistemą esant pusiausvyrai ir apskaičiuoja būsenų stacionariąsias tikimybes bei pagal pateiktas formules suskaičiuoja sistemos funkcionavimo charakteristikas. Analizinio-skaitinio modeliavimo rezultatai palyginti su imitacinio modeliavimo rezultatais. Imitacinis modeliavimas buvo atliktas su modeliavimo programine įranga *ARENA*.

2. Skirstinių aproksimavimas eksponentiniais mišiniais ir sąsūkomis

Pasiskirstymo funkciją $G(t)$, $t > 0$ aproksimuosime eksponentinių skirstinių mišiniais ir sąsūkomis. Skirstinių aproksimavimui naudosime antros eilės Erlango mišinį ir Kokso skirstinį. Erlango mišinio ir Kokso skirstinio parametrai randami taikant trijų momentų sulyginimo metodą.

Erlango mišinio tankio funkcija $f(t)$:

$$f(t) = p\mu_1 \frac{(\mu_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\mu_1 t\} + (1-p)\mu_2 \frac{(\mu_2 t)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{-\mu_2 t\},$$
$$t > 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0.$$

Erlango skirstinių mišinys schematiškai atvaizduotas 1 pav.

Erlango mišinio parametrų radimo algoritmas pateiktas [4]. Reikia pažymėti, kad Erlango mišiniu galima aproksimuoti bet kokį teigiamą skirstinį, turintį tris pradinius momentus $E(X)$, $E(X^2)$ ir $E(X^3)$ be papildomų apribojimų:

a) parametras n parenkamas kaip mažiausias natūrinis skaičius, tenkinantis nelygybes:

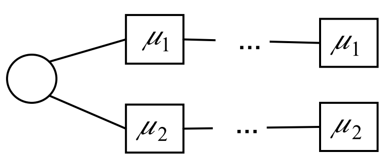
$$n > \frac{1}{c^2} \quad \text{ir} \quad n > \frac{-\gamma + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c} + 2c}{\gamma - c + \frac{1}{c}};$$

b) suradus n, apskaičiuojami papildomi kintamieji:

$$x = E(X)E(X^3) - \frac{n+2}{n+1}E(X^2)E(X^2), \quad y = E(X^2) - \frac{n+1}{n}E(X)E(X),$$
$$A = n(n+2)E(X)y, \quad B = -\left(nx + \frac{n(n+2)}{n+1}y^2 + (n+2)E(X)E(X)y\right),$$
$$C = x \cdot E(X);$$

c) Erlango mišinio parametrai:

$$\mu_1 = \frac{2A}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}, \quad \mu_2 = \frac{2A}{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}},$$
$$p = \left(\frac{E(X)}{n} - \frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right).$$



1 pav. Erlango skirstinių mišinys.

Kokso skirstinio tankio funkcija $f(t)$:

$$f(t) = \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} + \frac{p_1\mu_1}{p_1\mu_2 - \mu_1}\big(\mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} - p_2\mu_2 \mathrm{e}^{-p_2\mu_2 t}\big),$$
$$t > 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0.$$

Šio skirstinio fazinė schema pavaizduota 2 pav.

Aproksimuojant skirstinį $G(t)$ Kokso skirstiniu, jis turi tenkinti sąlygas [5]:

$$\left\{\frac{4}{3}m_2 \leqslant m_3 \leqslant \frac{6(m_2-1)}{m_2} \cap \frac{3}{2} \leqslant m_2 \leqslant 2\right\} \cup \left\{\frac{4}{3}m_2 \leqslant m_3 \cap 2 < m_2\right\},$$

čia

$$m_2 = \frac{E(X^2)}{(E(X))^2}, \quad m_3 = \frac{E(X^3)}{E(X)E(X^2)}.$$

Kokso skirstinio parametrai randami iš formulių [6]:

$$\mu_2 = \frac{f_1 f_2 - f_3 \pm \sqrt{D}}{2(f_2^2 - f_1 f_3)}, \quad \mu_1 = \frac{\mu_2 f_1 - 1}{\mu_2 f_2 - f_1}, \quad p = \frac{\mu_2(f_1\mu_1 - 1)}{\mu_1},$$

čia

$$f_k = \frac{E(X^k)}{k!}, \quad D = (f_1 f_2 - f_3)^2 - 4(f_2^2 - f_1 f_3)(f_1^2 - f_2).$$

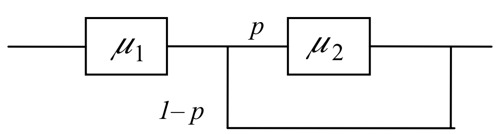
3. Aptarnavimo sistemos G/G/1 skaitmeninis Markovo modelis

Nagrinėkime aptarnavimo sistemą G/G/1, kurios paraiškų srautas pasiskirstęs pagal gama skirstinį su tankio funkcija $f(t) = \frac{1{,}6^{1{,}5}}{\Gamma(1{,}5)} t^{0{,}5} \mathrm{e}^{-1{,}6\cdot t}$, $t > 0$; paraiškų aptarnavimo laiko skirstinys yra lognormalusis su tankio funkcija

$$f(t) = \frac{1}{0,9 \cdot t\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln(t) + 0,9)^2}{2 \cdot 0,9^2}\right\}, \quad t > 0.$$

Gama skirstinį aproksimuojam Kokso skirstiniu, sulygindami 3 pradinius momentus. Gauti tokie Kokso skirstinio parametrai: $p = 0,7075$; $\mu_1 = 1,4587$; $\mu_2 = 2,808$.

Lognormalųjį skirstinį aproksimuojam Erlango mišiniu. Erlango mišinio parametrai yra šie: $n = 1$; $p = 0,0069$; $\mu_1 = 0,3134$; $\mu_2 = 1,69$.



2 pav. Kokso skirstinio fazinė schema.

Žinant šias tankio funkcijas, sistemos G/G/1 funkcionavimą galima aprašyti Markovo grandine su skaičia būsenų aibe ir tolydžiuoju laiku. Šį procesą galima modeliuoti pasinaudojus metodika, aprašyta monografijoje [1].

Sistemos fazinė schema, panaudojus skirstinių aproksimavimą eksponentiniais mišiniais ir sąsūkomis, pavaizduota 3 pav.

Sistemos būsenų aibė:

$N = \{(n_1, n_2, n_3)\}$, $n_1 = \overline{0, 2}$; $n_2 = \overline{0, L}$; $n_3 = \overline{0, 3}$.

n_1 parodo, kurioje srauto bloko fazėje yra atvykstanti paraiška (0 – jei srauto blokas tuščias);

n_2 – paraiškų skaičius sistemoje (0 – jei sistema tuščia);

n_3 – paraiškų skaičius aptarnavimo įrenginyje (0 – jei aptarnavimo blokas tuščias).

Sistemos įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$:

e_1 – paraiška atėjo į srauto bloko pirmąją fazę;

e_2 – paraiška perėjo į srauto bloko antrą fazę su tikimybe p_1 ir intensyvumu λ_1;

e_3 – paraiška baigta aptarnauti pirmoje srauto bloko fazėje ir ateina į aptarnavimo bloko pirmą fazę su tikimybe $1 - p_1$ ir intensyvumu λ_1;

e_4 – paraiška baigta aptarnauti srauto bloko antroje fazėje ir ateina į aptarnavimo bloko pirmą fazę su intensyvumu λ_2;

e_5 – paraiška perėjo į aptarnavimo bloko antrą fazę su tikimybe p_2;

e_6 – paraiška perėjo į aptarnavimo bloko trečią fazę su tikimybe $1 - p_2$;

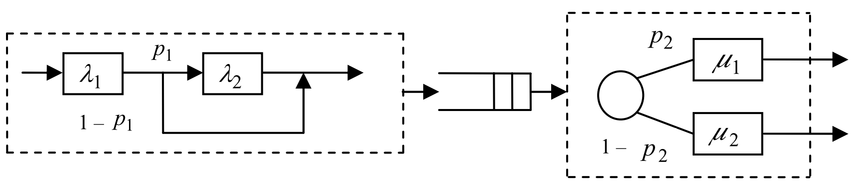
e_7 – paraiška baigta aptarnauti antroje aptarnavimo bloko fazėje ir palieka sistemą su intensyvumu μ_1;

e_8 – paraiška baigta aptarnauti trečioje aptarnavimo bloko fazėje ir palieka sistemą su intensyvumu μ_2.

Norint sugeneruoti galimų Markovo proceso būsenų erdvę ir perėjimo intensyvumų matricą, sistemą G/G/1 reikia aprašyti įvykių kalba [3]. Sistemos funkcionavimo algoritmas, naudojant pseudokodą, pateiktas 1 lentelėje.

Įvykių aprašyme naudotas simbolis C – pakankamai didelis (pvz., 10000 kartų didesnis už kitų fazių intensyvumus) teigiamas realusis skaičius.

Sukurtoji programinė priemonė pagal įvykių aprašymą generuoja visas galimas Markovo proceso būsenas, perėjimo intensyvumų matricą, sudaro lygčių sistemą ir apskaičiuoja būsenų stacionariąsias tikimybes $\pi(n_1, n_2, n_3)$. Žinant stacionarias tikimybes, galima apskaičiuoti įvairias sistemos G/G/1 charakteristikas. Pvz., vidutinis



3 pav. Sistemos fazinė schema.

1 lentelė

e_1: if $n_1 = 0$ then $n_1 \leftarrow 1$ end if Return Intens $\leftarrow C$	e_2: if $n_1 = 1$ then $n_1 \leftarrow 2$ end if Return Intens $\leftarrow p \cdot \lambda_1$
e_3: if $n_1 = 1$ if $n_3 = 0$ and $n_2 < L$ then $n_2 \leftarrow n_2 + 1;\ n_1 \leftarrow 0;\ n_3 \leftarrow 1$ else if $n_2 < L$ then $n_2 \leftarrow n_2 + 1;\ n_1 \leftarrow 0$ end if Return Intens $\leftarrow (1-p) \cdot \lambda_1$	e_4: if $n_1 = 2$ if $n_3 = 0$ and $n_2 < L$ then $n_2 \leftarrow n_2 + 1;\ n_1 \leftarrow 0;$ $n_3 \leftarrow 1$ else if $n_2 < L$ then $n_2 \leftarrow n_2 + 1;\ n_1 \leftarrow 0$ end if Return Intens $\leftarrow \lambda_2$
e_5: if $n_2 = 1$ then $n_2 \leftarrow 2$ end if Return Intens $\leftarrow p \cdot C$	e_6: if $n_2 = 1$ then $n_2 \leftarrow 3$ end if Return Intens $\leftarrow (1-p) \cdot C$
e_7: if $n_1 = 2$ if $n_2 > 1$ then $n_1 \leftarrow n_1 - 1; n_2 \leftarrow 1;$ else $n_2 \leftarrow n_2 + 1; n_2 \leftarrow 0$ end if end if Return Intens $\leftarrow \mu_1$	e_8: if $n_1 = 3$ if $n_2 > 1$ then $n_1 \leftarrow n_1 - 1; n_2 \leftarrow 1;$ else $n_2 \leftarrow n_2 + 1; n_2 \leftarrow 0$ end if end if Return Intens $\leftarrow \mu_2$

sistemoje esančių paraiškų skaičius $E(L)$ randamas iš formulės

$$E(L) = \sum_{n_1=0}^{2} \sum_{n_2=0}^{L} \sum_{n_3=0} n_2 \cdot \pi(n_1, n_2, n_3) + \sum_{n_1=0}^{2} \sum_{n_2=0}^{L} \sum_{n_3 \neq 0} (n_2 - 1) \cdot \pi(n_1, n_2, n_3).$$

Tikimybes, kad sistemoje yra n paraiškų, p_n galima rasti iš formulės

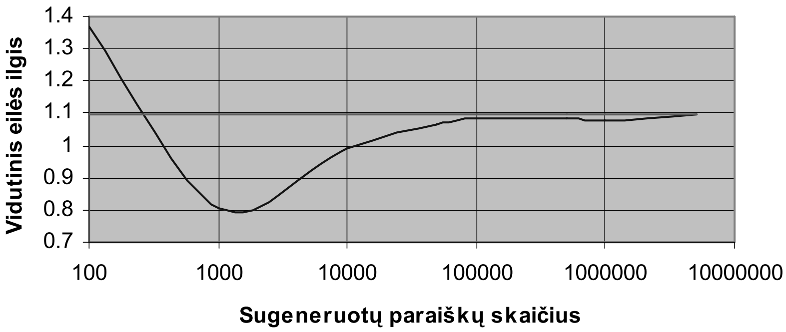
$$p_n = \sum_{n_1=0}^{2} \sum_{n_2=n} \sum_{n_3=0}^{3} \pi(n_1, n_2, n_3).$$

4. Aptarnavimo sistemos G/G/1 modeliavimo rezultatų palyginimas

Skaitmeninio modeliavimo rezultatai palyginti su imitacinio modeliavimo rezultatais. Įvertintas aptarnavimo sistemos vidutinis eilės ilgis $E(L^q)$ ir tikimybės p_n ($n = \overline{0,5}$). Atliekant imitacinį modeliavimą sugeneruota 5000000 paraiškų. Pateikiame rezultatus 2 lentelėje.

2 lentelė

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$E(L^q)$
Skaitinis-analizinis modeliavimas	0,3498	0,2597	0,1515	0,0895	0,0536	0,0328	1,0941
Imitacinis modeliavimas	0,3499	0,2692	0,1452	0,0839	0,0517	0,0328	1,0948
Santykinis skirtumas	0,03%	3,66%	−4,16%	−6,26%	−3,54%	0,00%	0,06%



4 pav. $E(L^q)$ reikšmės kitimas didinant sugeneruotų paraiškų kiekį.

Kaip matome, tarp imitacinio ir įvykių kalba aprašyto kompiuterinio modeliavimo rezultatų skirtumas nedidelis. Turint omenyje, kad esant dideliam modeliuojamų paraiškų skaičiui imitacinio modeliavimo rezultatai artimi tikriesiems, galima sakyti, kad nagrinėjamas metodas tinka sistemų G/G/1 modeliavimui. 4 pav. pateikiame imitaciniu modeliavimu įvertintą $E(L^q)$ reikšmės kitimą, didinant sugeneruotų paraiškų kiekį.

Matome, kad didinant sugeneruotų paraiškų skaičius palaipsniui nusistovi apie $E(L^q)$ reikšmę, gautą atlikus skaitmeninį sistemos modeliavimą.

5. Pabaiga

Darbe pateikta teigiamų skirstinių aproksimavimo eksponentinių skirstinių mišiniais ir sąsūkomis pavyzdžiai. Taikant trijų momentų sulyginimo aproksimavimo metodiką ir naudojant fiktyvių fazių metodą galima aptarnavimo sistemų modelius aprašyti Markovo grandine su skaičia būsenų erdve ir tolydžiuoju laiku. Taikant įvykių kalbą ir įdėtųjų Markovo grandinių algoritmą, galima sugeneruoti sistemos galimų būsenų aibę, perėjimo intensyvumus tarp jų ir apskaičiuoti būsenų stacionariąsias tikimybes. Pateiktas aptarnavimo sistemos G/G/1 tyrimas parodė, kad nagrinėjamą metodiką galima taikyti sudėtingoms aptarnavimo sistemoms modeliuoti.

Literatūra

1. H. Pranevičius, E. Valakevičius, *Numerical Models of Systems Specified by Marcovian Processes*, Technologija, Kaunas (1996).

2. M. Johnson, M. Taaffe, Matching moments to phase distributions: mixture of Erlang distribution of common order, *Commun. Statist. – Stochastic Models*, **5**, 711–743 (1989).
3. G. Mickevičius, E. Valakevičius, Modelling of non-Markovian queuing systems, *Technological and Economic Development of Economy*, **XII**(4), 295–300 (2006).
4. E. Valakevičius, Prioritetinės sistemos su eilėmis skaitmeninio modelio aproksimavimas, iš *Matematika ir matematinis modeliavimas*, Technologija, Kaunas (1999), pp. 32–36.
5. A.D. Khonomenko, V.P. Bubnov, A use of coxian distribution law for iterative solution of M/G/n/R$\leqslant \infty$ queueing systems, *Problems of Control and Information Theory*, **14**(2), 143–153 (1985).
6. T. Osogami, M. Harchol-Balter, *Necessary and Sufficient Conditions for Representing General Distributions by Coxians*, School of Computer Science, Carnegie Mellon University (2003).

SUMMARY

M. Šnipas, E. Valakevičius. Application of mixture of exponentials distributions for modeling queuing systems

The article considers approximation of positive distribution functions by mixture of exponentials distributions. This approximation enables to model non-markovian queuing systems by Markov process with continuous time and countable set of states.

Keywords: queuing system, approximation of distribution functions, continuous time Markov chains, numerical-analytic modeling.