

Netolygusis k -tojo maksimumo konvergavimo greičio įvertis

Arvydas JOKIMAITIS

Kauno technologijos universitetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
el. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje gautas nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k -tojo maksimumo netolygusis konvergavimo greičio įvertis.

Raktiniai žodžiai: ekstremaliosios reikšmės, pozicinės statistikos, netolygusis konvergavimo greičio įvertis.

1. Įvadas

Tarkime, kad $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$. Sudarysime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę:

$$X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Didžiausią variacinės eilutės narį vadinsime maksimumu ir žymėsime Z_n . Kai k yra fiksuotas, o $n \rightarrow \infty$, pozicinę statistiką $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k -tuoju maksimumu.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x));$$

čia $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geq 1\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos. Tarkime, kad skirstinio funkcija $F(x)$ yra tokia, jog

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) > 0. \quad (1)$$

Tada (žr. [5])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \quad (2)$$

visuose funkcijos H tolydumo taškuose; čia H – neišsigimusi skirstinio funkcija. Be to $H(x) = e^{-u(x)}$. Ribinių maksimumo skirstinių klasės pirmą kartą aprašytos [2] darbe.

1 TEOREMA. *Tiesiškai normuotas k -tasis maksimumas turi neišsigimusį ribinį skirstinį $H_{(k)}(x)$ tada ir tik tada, kai galioja (2) lygybė. Be to su visais x , tokiais, kad $0 < u(x) < \infty$, galioja lygybė*

$$H_{(k)}(x) = H(x) \sum_{t=0}^{k-1} \frac{(u(x))^t}{t!}. \quad (3)$$

1 teoremos įrodymas pateiktas [5] darbe.

Šiame darbe rasime tiesiškai normuoto ir centruoto k -tojo maksimumo netolygų konvergavimo greičio įvertį. Pažymėsime, kad k -tųjų ekstremaliųjų reikšmių bei pozicinių statistikų problematika bene plačiausiai yra apžvelgta [4] darbe. Tolygusis konvergavimo greičio įvertis yra gautas [1] darbe. Apibendrintųjų pozicinių statistikų asimptotika yra nagrinėta [3] darbe.

2. Pagrindinis rezultatas

Pažymėkime

$$\begin{aligned} v_n(x) &= u_n(x) - u(x), \\ u_{n-t}(x) &= (n-t)(1 - F(a_n + b_n x)), \\ v_{n-t}(x) &= u_{n-t}(x) - u(x), t = 1, \dots, k-1, \\ \tau_n(x) &= \max(u_n(x), u(x)), \\ c(n, t) &= \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{n^t}. \end{aligned}$$

2 TEOREMA. *Tarkime, tenkinama (3) lygybė. Su visais x ir n , su kuriais $|v_n(x)| \leq \ln 2$, $|v_{n-t}(x)| \leq \ln 2$ ir $n \geq k \geq 2$, teisingas netolygusis konvergavimo greičio įvertis*

$$\begin{aligned} &|P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x)| \\ &\leq \Delta_n(x) + \sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n, t)(u_n(x))^t \Delta_{n-t}(x)}{t!} + H(x)|v_n(x)| \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(\tau_n(x))^{t-1}}{t!} \\ &+ H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1 - c(n, t)}{t!} (u_n(x))^t; \end{aligned}$$

čia

$$\begin{aligned} \Delta_{n-t}(x) &= \frac{(u_{n-t}(x))^2 e^{-u_{n-t}(x)}}{2(n-t-1)} + H(x)(|v_{n-t}(x)| + \theta_t (v_{n-t}(x))^2), \quad 0 < \theta_t < 1, \\ \Delta_n(x) &= \frac{(u_n(x))^2 e^{-u_n(x)}}{2(n-1)} + H(x)(|v_n(x)| + \theta (v_n(x))^2), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Kai $k = 1$, konvergavimo greičio įvertis lygus $\Delta_n(x)$.

Pastaba. Kai kurių skirstinių (pavyzdžiui, eksponentinio, tolygiojo intervale, Pareto) atveju centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti taip, kad gautume $v_n(x) = 0$. Tada įverčio išraiška yra žymiai paprastesnė.

Įrodymas. Turime

$$\begin{aligned} & \left| P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x) \right| \\ &= \left| \sum_{t=0}^{k-1} C_n^t (F(a_n + b_n x))^{n-t} (1 - F(a_n + b_n x))^t - H(x) \sum_{t=0}^{k-1} \frac{(u(x))^t}{t!} \right| \\ &\leq \left| F^n(a_n + b_n x) - H(x) \right| \\ &+ \left| \sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n, t)}{t!} (F(a_n + b_n x))^{n-t} (n(1 - F(a_n + b_n x)))^t - H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(u(x))^t}{t!} \right|. \end{aligned}$$

Atsižvelgę į tai, kad

$$cx_1x_2 - y_1y_2 = cx_2(x_1 - y_1) + y_1(x_2 - y_2) + x_2y_1(c - 1),$$

su visais c, x_1, x_2, y_1, y_2 , gauname

$$\begin{aligned} & \left| P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x) \right| \leq \left| F^n(a_n + b_n x) - H(x) \right| \\ &+ \sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n, t)}{t!} (u_n(x))^t \left| (F(a_n + b_n x))^{n-t} - H(x) \right| \\ &+ H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!} \left| (u_n(x))^t - (u(x))^t \right| + H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1 - c(n, t)}{t!} (u_n(x))^t \quad (4) \end{aligned}$$

Įvertinsime (4) nelygybės dešinėsios pusės antrąjį dėmenį. Turime

$$\begin{aligned} & \left| (F(a_n + b_n x))^{n-t} - H(x) \right| \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{u_{n-t}(x)}{n-t} \right)^{n-t} - e^{-u_{n-t}(x)} \right| + \left| e^{-u_{n-t}(x)} - e^{-u(x)} \right|. \quad (5) \end{aligned}$$

Įvertinsime (5) nelygybės dešinėsios pusės pirmąjį dėmenį. Taikydami nelygybę

$$e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n \leq \frac{x^2 e^{-x}}{2(n-1)},$$

kai $0 \leq x \leq n$, gauname

$$\left| \left(1 - \frac{u_{n-t}(x)}{n-t} \right)^{n-t} - e^{-u_{n-t}(x)} \right| \leq \frac{(u_{n-t}(x))^2 e^{-u_{n-t}(x)}}{2(n-t-1)}. \quad (6)$$

Dabar įvertinsime (5) nelygybės dešinėsios pusės antrąjį dėmenį. Taikydami nelygybę

$$e^{-y} - e^{-x} \leq e^{-x} (|x - y| + \theta(x - y)^2),$$

čia $0 < \theta < 1$ ir $x - y \leq \ln 2$, gauname

$$|e^{-u_{n-t}(x)} - e^{-u(x)}| \leq H(x)(|v_{n-t}(x)| + \theta_t(v_{n-t}(x))^2). \quad (7)$$

Atsižvelgę į (6) ir (7) nelygybes, gauname

$$\sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n, t)}{t!} (u_n(x))^t |(F(a_n + b_n x))^{n-t} - H(x)| \leq \sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n, t)(u_n(x))^t \Delta_{n-t}(x)}{t!}. \quad (8)$$

Analogiškai gauname, kad

$$|F^n(a_n + b_n x) - H(x)| \leq \Delta_n(x). \quad (9)$$

Dabar įvertinsime (4) nelygybės dešinėsios pusės trečiąjį dėmenį. Kadangi

$$b^t - a^t = \int_a^b t x^{t-1} dx \leq t|a - b|(\max(a, b))^{t-1},$$

kai $a \geq 0, b \geq 0, t \geq 1$, tai

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} H(x) |(u_n(x))^t - (u(x))^t| &= H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!} |(u_n(x))^t - (u(x))^t| \\ &\leq H(x) |v_n(x)| \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(\tau_n(x))^{t-1}}{(t-1)!}. \end{aligned} \quad (10)$$

Atsižvelgę į (4), (8), (9) ir (10) nelygybes, gauname teoremos įvertį.

Literatūra

1. M. Falk. Rates of uniform convergence of extreme order statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 38:245–262, 1986.
2. B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Ann. Math.*, 44:423–453, 1943.
3. F. Marohn. On rates of uniform convergence of lower extreme generalized order statistics, *Extremes*, 7:271–280, 2004.
4. R.-D. Reiss. *Approximate Distributions of Order Statistics*. New York, Springer, 1989.
5. Я. Галамбош. *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Москва, Наука, 1984.

SUMMARY

A. Jokimaitis. The nonuniform estimate of the convergence rate of the k th maxima

In this paper the nonuniform estimate of the convergence rate for the k th maxima of the independent identically distributed random variables is obtained.

Keywords: extreme values, order statistics, convergence rate, nonuniform estimate.