Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 407–411

Tikimybinių skirstinių asimptotiniai skleidiniai

Algimantas BIKELIS, Kazimieras PADVELSKIS
Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas
Vileikos g. 8, LT-44404 Kaunas
el. paštas: marius@post.omnitel.net; k.padvelskis@if.vdu.lt

Santrauka. Darbe nagrinėjamos nepriklausomų sveikaskaitinių vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių serijos, tenkinančios būtinas ir pakankamas sąlygas, kad atsitiktinių dydžių sumų tikimybiniai skirstiniai silpnai konverguotų į sudėtinio Puasono dėsnio tikimybinį skirstinį. Atsitiktinių dydžių sumos tikimybiniui skirstiniui, pritaikius H. Bergstremo tapatybę, gauti "ilgi" asimptotiniai skleidiniai. Jie apibendrina B. Grigelionio asimptotinius skleidinius.

Raktiniai žodžiai: nepriklausomų atsitiktinių dydžių serijos, sudėtinis Puasono skirstinys, Bergstremo–Grigelionio asimptotinis skleidinys.

Įvadas

B. Grigelionis darbuose [1,2] nagrinėjo nepriklausomų sveikaskaitinių atsitiktinių dydžių

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

sumos

$$\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}, \tag{2}$$

tikimybinio skirstinio $F_n(x) = P\{\zeta_n < x\}$ aproksimavimą sudėtiniu Puasono tikimybiniu skirstiniu $G(x; \{\pi\})$, kurio charakteringoji funkcija yra

$$\widehat{G}(t) = \exp\left\{ \sum_{k \neq 0} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} - 1\right)\pi(k) \right\},$$

čia $\pi(k) \geqslant 0$ ir $\sum_{k\neq 0} \pi(k) < \infty$. Darbe [2] yra reikalaujama, kad

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant k_n} \bigl(1 - P\{\xi_{nj} = 0\}\bigr) = 0 \tag{3}$$

bei galiotų būtinos ir pakankamos sąlygos, užtikrinančios $F_n(x)$ silpną konvergavimą į $G(x; \{\pi\})$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} P\{\xi_{nj} = k\} = \pi(k), \quad k \neq 0 \tag{4}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\bigl(1-P\{\xi_{nj}=0\}\bigr)=\sum_{k\neq 0}\pi(k). \tag{5}$$

Esant šioms sąlygoms, B. Grigelionis [2] sukonstravo asimptotinį skleidinį $\overline{F}_n(x)$ ir įvertino liekamąjį narį $F_n(x)-\overline{F}_n(x)$.

Savo darbe [3] mes parodėme, kaip galima pereiti nuo skirtingai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių nagrinėjimo prie vienodai pasiskirsčiusių, todėl šiame straipsnyje nagrinėsime nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių, sveikaskaitinių atsitiktinių dydžių seką (1).

Toliau nagrinėsime skirtumo

$$\Delta_n(x)=F_n(x)-G(x;\{\pi\}) \tag{6}$$

asimptotinį elgesį. Šio skirtumo asimptotinės formulės pirmiausia priklausys nuo (3) sąlygos, o po to ir nuo (4), (5) sąlygų, t.y. asimptotiniuose skleidiniuose narius būtina grupuoti, atsižvelgiant į (3), (4), (5) ribų greičius (jie gali būti skirtingi).

1. Bergstremo–Grigelionio skleidiniai charakteringosioms funkcijoms

Atsitiktinių dydžių ξ_{nj}, $j=1,2,\dots,k_n$ ir ζ_n charakteringąsias funkcijas atitinkamai žymėsime $\widehat{F}_{n1}(t)$ ir $\widehat{F}_n(t)$. Mūsų nagrinėjamu atveju

$$\widehat{F}_{n1}(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tm}P\{\xi_{n1}=m\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tm}p_{n1}(m)=p_{n1}(0)+\sum_{m\neq 0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tm}p_{n1}(m).$$

Pastebėsime, kad

$$\widehat{F}_{n1}(t)-1=\bigl(1-p_{n1}(0)\bigr)\bigl(\widehat{G}_{n1}^{(1)}(t)-1\bigr), \tag{7}$$

ir

$$\widehat{F}_{n1}(t)-1=p_{n1}(1)\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\bigr)+\bigl(1-p_{n1}(0)-p_{n1}(1)\bigr)\bigl(\widehat{G}_{n1}^{(2)}(t)-1\bigr), \tag{8}$$

čia

$$\widehat{G}_{n1}^{(1)}(t)=\sum_{m\neq 0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tm}\frac{p_{n1}(m)}{1-p_{n1}(0)},\qquad \widehat{G}_{n1}^{(2)}(t)=\sum_{m\neq 0,1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tm}\frac{p_{n1}(m)}{1-p_{n1}(0)-p_{n1}(1)}$$

charakteringosios funkcijos.

Kaip ir darbe [2], pažymėkime

$$S=\bigl\{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\bigm|\pi(k)>0\bigr\},\qquad \pi_n(k)=k_np_{n1}(k).$$

Tada galime rašyti

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{n1}(t)-1&=\frac{1}{k_n}\sum_{k\in S}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}-1\bigr)\pi(k)+\frac{1}{k_n}\sum_{k\in S}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}-1\bigr)\bigl(\pi_n(k)-\pi(k)\bigr)\\&\quad+d_{n1}\sum_{k\notin S}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}-1\bigr)\frac{p_{n1}(k)}{d_{n1}},\end{aligned}$$

čia

$$d_{n1} = 1 - p_{n1}(0) - \sum_{k\in S} p_{n1}(k) = \sum_{k\notin S} p_{n1}(k).$$

Pažymėkime

$$g_1(t) = \sum_{k\in S}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} - 1\bigr)\bigl(\pi_n(k) - \pi(k)\bigr) \quad \text{ir} \quad g_2(t) = \sum_{k\notin S} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}\,\frac{p_{n1}(k)}{d_{n1}}.$$

Pastebėsime, kad $g_2(t)$ yra charakteringoji funkcija.

Vadinasi,

$$k_n\bigl(\widehat{F}_{n1}(t) - 1\bigr) = \sum_{k\in S}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} - 1\bigr)\pi(k) + g_1(t) + k_n d_{n1}\bigl(g_2(t) - 1\bigr). \tag{9}$$

Iš sąlygų (3), (4), (5) išplaukia, kad, kai $n \to \infty$,

$$\pi_n(k) - \pi(k) \to 0, \quad \text{kai } k \in S$$

ir

$$\pi_n(k) = k_n p_{n1}(k) \to 0, \quad \text{kai } k \notin S.$$

Pasinaudoję (7), (8), (9) lygybėmis, (1) atsitiktinių dydžių sekos tikimybių begalinio mažumo (3) sąlyga ir atlikę skaičiavimus, kuriuos čia praleidžiame, įrodome teoremą:

1 TEOREMA (Bergstremo–Grigelionio skleidinys). *Visiems $t \in \mathbb{R}$ ir $n \in A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(0) > \frac{3}{4}\}$ teisinga lygybė*

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_n(t) &= \exp\bigl\{k_n\bigl(1 - p_{n1}(0)\bigr)\bigl(\widehat{G}_{n1}^{(1)}(t) - 1\bigr)\bigr\} \\
&\times \Biggl\{1 + \sum_{\nu=1}^{s}(-1)^{\nu}\binom{k_n}{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(\bigl(1 - p_{n1}(0)\bigr)\bigl(\widehat{G}_{n1}^{(1)}(t) - 1\bigr)\Bigr)^{2\nu+k} P\{\mu_\nu = k\} \\
&+ \binom{k_n}{s+1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^{s+l+j+1} q_{jk}\Bigl(\bigl(1 - p_{n1}(0)\bigr)\bigl(\widehat{G}_{n1}^{(1)}(t) - 1\bigr)\Bigr)^{2(s+1)+l+j+k+1} \\
&\times P\{\mu_{s+1} = l\} E(k_n - \theta_{s+1})^{k+1}\Biggr\},
\end{aligned}$$

čia

$$P\{\mu_\nu = k\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tk}\Biggl(\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tl}\,\frac{l+1}{(l+2)!}\Biggr)^{\nu}\,\mathrm{d}t,$$

atsitiktinis dydis θ_{s+1} yra pasiskirstęs pagal neigiamą hipergeometrinį dėsnį, t.y.

$$P\{\theta_{s+1} = m\} = \frac{\binom{m-1}{s}}{\binom{k_n}{s+1}}, \quad m = s+1, \ldots, k_n$$

ir $|E(k_n-\theta_{s+1})^{k+1}|\leqslant(k_n-s-1)^{k+1}$,

$$q_{jk}=\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\dots+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_j=k+1}}\frac{1}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu_2}\dots\left(\frac{1}{j+1}\right)^{\nu_j},$$

be to, $q_{jk}\leqslant\frac{1}{2}$, $k=1,2,\dots,j-1,\ j=1,2,\dots$.

2. Bergstremo–Grigelionio skleidiniai tikimybiniams skirstiniams

Šiame skyrelyje nagrinėsime skirtumą

$$P\{\zeta_n=r\}-P\{\Pi=r\},$$

čia

$$P\{\Pi=r\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tr}\exp\left\{\sum_{k\in S}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}-1\right)\pi(k)\right\}\mathrm{d}t,$$

visiems $r=0,\pm1,\pm2,\dots$.

Suformuluosime dar vieną teoremą:

2 TEOREMA. *Visiems* $r=0,\pm1,\pm2,\dots$ *ir* $n\in A_1=\{n\in\mathbb{N}\,|\,p_n(0)>\frac{3}{4}\}$ *teisinga lygybė*

$$P\{\zeta_n=r\}=P\{\Pi=r\}*\sum_{l_1=0}^{\infty}\frac{1}{l_1!}\big(\pi_n(r)-\pi(r)\big)^{*l_1}*\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_2!}\mathrm{e}^{-k_nd_{n1}}\left(\frac{p_{n1}(r)}{d_{n1}}\right)^{*l_2}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{s}\binom{k_n}{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\nu+k}\left(\frac{1}{k_n}\right)^{2\nu+k}\left(\frac{\mathrm{d}^{2\nu+k}}{\mathrm{d}\lambda^{2\nu+k}}Q_\lambda(r)\bigg|_{\lambda=1}\right)P\{\mu_\nu=k\}$$
$$+\binom{k_n}{s+1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^{s+l+j+1}q_{jk}\left(\frac{1}{k_n}\right)^{2(s+1)+l+j+k+1}$$
$$\times\left(\frac{\mathrm{d}^{2(s+1)+l+j+k+1}}{\mathrm{d}\lambda^{2(s+1)+l+j+k+1}}Q_\lambda(r)\bigg|_{\lambda=1}\right)P\{\mu_{s+1}=l\}E(k_n-\theta_{s+1})^{k+1},$$

čia

$$Q_\lambda(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tr}\exp\left\{\lambda k_n\big(1-p_{n1}(0)\big)\big(\widehat{G}_{n1}^{(1)}(t)-1\big)\right\}\mathrm{d}t.$$

1 ir 2 teoremų įrodymus paskelbsime kitame straipsnyje.

Literatūra

1. B. Grigelionis. On asymptotic expansion of the remainder term in the case of convergence to a Poisson law. *Liet. mat. rink.*, 2(1):35–48, 1962 (in Russian).
2. B. Grigelionis. Asymptotic expansions in the compound Poisson limit theorem. *Acta Applicandae Mathematicae*, 58:125–134, 1999.
3. K. Padvelskis, A. Bikelis. Apibendrintų matų sąsūkos. *Liet. mat. rink., LMD darbai*, 50, 2009.

SUMMARY

A. Bikelis, K. Padvelskis. Asymptotic expansions of probability distributions

Asymtotic expansions for the probability distributions of sums of independent random variables are studied in this paper.

Keywords: series of independent random variables, compound Poisson distribution, Bergström–Grigelionis' asymtotic expansions.