

## Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas Lietuvos mokykloje iki matematikos mokymo reformos (1918–1928)

Joana KASTICKAITĖ<sup>1</sup>, Juozas BANIONIS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas  
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius, Lietuva

<sup>2</sup> Vilniaus Pedagoginis universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas  
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius, Lietuva  
el. paštas: kasjoa@mruni.lt; j.banionis@vpu.lt

**Santrauka.** Straipsnyje aptariamas diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas iki matematikos mokymo reformos (1918–1928), remiantis Juozo Stoukaus vadovėliu „Begalinių mažybių analizio pagrindai“, tuometinėmis aukštesniųjų mokyklų programomis ir to laikotarpio matematikų straipsniais.

**Raktiniai žodžiai:** diferencialinis skaičiavimas, integralinis skaičiavimas, funkcija, Meranės konferencija, matematikos mokymo reforma.

Straipsnio tikslai: supažindinti su diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymu Lietuvos mokykloje iki matematikos mokymo reformos (1918–1928), nustatyti diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymo privalumus ir trūkumus nurodytu laikotarpiu.

Matematikos programa Lietuvoje ilgai nekito. Tuo metu kitų mokslų naujausi atradimai turėjo įtakos tų mokslų programoms. Nors matematikos mintis XVIII–XIX a. suklestėjo, bet mokyklose matematika ilgą laiką liko nepakeista. Pavyzdžiui, aritmetikoje ir algebroje stengtasi įpratinti mokinius greitai atlikti sudėtingus veiksmus ir pertvarkyti reiškinius, geometrijoje – „kalti“ teoremas ir įrodymus griežtai logiška „euklidiška“ tvarka. Matematikos dėstymo tikslas buvo mokinių loginių gebėjimų vystymas. Tik XX amžiaus pradžioje pradėtas reformuoti matematikos dėstymas. Pagrindinis šios reformos organizatorius Vokietijoje buvo matematikos profesorius Feliksas Kleinas (1849–1925). Reformos reikalavo, kad matematika mokyklose nebūtų abstraktus mokslas, nutolęs nuo gyvenimo.

Neįmanoma nepaminėti, kad 1905 m. Meranėje vyko Vokietijos gamtininkų ir gydytojų suvažiavimas, kuris priėmė Vokietijos bendrojo lavinimo mokyklų matematikos programos projektą. Jo organizatorius buvo jau minėtas vokiečių matematikas Feliksas Kleinas. Ši programa, dar vadinama Meranės programa, reikalavo dėstyti matematiką, remiantis funkcijos sąvoka, pradėti mokyti analizinės geometrijos pradmenis, supažindinti su išvestinės ir integralo sąvokomis, jų naudojimu. Be to, siekiama metodinių reformų: nereikalauti griežto pagrindimo (tai buvo numatoma tik vyresniosiose klasėse), daugiau vartoti vaizdinių priemonių, ypač remtis grafiniu vaizdavimu.

Meranės programa turėjo įtakos matematikos dėstymo pertvarkymui ne tik Vokietijoje, bet ir kitose Europos šalyse (pirmiausia Prancūzijoje) [4,5].

Lietuvoje Meranės programos šalininkų rūpesčiu vidurinėse mokyklose 1920 m. pradėti dėstyti diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenys. 1923 m. matematikos programoje aukštesniosioms mokykloms ir vidurinėms bendrojo lavinimo mokykloms VIII klasėje jau įvesti analizės pagrindai [1]. Kadangi analizės pagrindai nedetalizuoti, galima daryti prielaidą, kad diferencialinio ir integralinio skaičiavimo buvo mokoma iš Juozo Stoukaus (1886–1946) vadovėlio „Begalinių mažybių analizo pagrindai“. Vadovėlis išleistas Kaune 1925 m. Jį sudaro šeši skyriai: „Apie ribas“, „Apie funkcijas“, „Diferencialinė skaičiuotė“, „Funkcijų kitimo tyrimas“, „Antralaipsnių (antrojo laipsnio) kreivųjų (kreivių) liečiamosios (liestinės) ir normalės“, „Integralinė skaičiuotė“. Lietuvoje Švietimo ministerija 1924 m. pradėjo esminę Švietimo sistemos reformą. Prof. Zigmas Žemaitis (1884–1969) sakė, kad „didelės svarbos įgyja begalinių mažybių analizo įvedamas kursas, kuriame duodamas susistemintas supratimas apie funkcijų ir jos kitimų tyrinėjimo būdus. Tai nereiškia, kad tame kurse turi būti išdėstyta kiek galint pilna funkcijų diferencijavimo ir integravimo teorija: reikia tik įvesti mokiniai į naujus metodus ir parodyti, kaip jie taikinami įvairiems kitų mokslų reikalams ir net gyvenimui. Bet kad tie dalykai nesirodytų mokiniams visai nauji, nepaprasti, tik ad hoc pavartoti, visas ankstesnis elementarinės matematikos kursas turi būti taip dėstomas, kad funkcijos ir jos kitimų sąvokos būtų keliamos aikštėn kiekviena proga, pradedant nuo žemiausiųjų matematikos dėstymo laipsnių. Begalinių mažybių analizo pagrindai privalo tik susisteminti tas sąvokas ir apvainikuoti visą elementarinės matematikos kursą“ [6]. Pasak J. Golcbergo, apibrėžusio tuometinę matematikos dėstymo padėtį: „matematikos programoje nepakankamai pabrėžiamos bendros matematikos idėjos: skaičiaus ir begalinių mažybių analizo idėja. Be tos sielos, be skaičiaus ir begalinių mažybių metodo supratimo, matematika virsta formalistika ir aukštoji matematika tik prideda savo formules prie elementarinės matematikos formulių. <...> Dėstant begalinių mažybių analizą, reikia parinkti uždavinių ne tik iš geometrijos, bet iš gamtos, iš mechanikos, fizikos ir chemijos sričių“ [7].

1928 m. prof. Z. Žemaičio vadovaujama Vykdomoji komisija pagal Vokietijos bendrojo lavinimo mokyklų matematikos programos projektą sudarė Lietuvos vidurinių ir aukštesniųjų mokyklų matematikos programą. Pastebėjus, kad mokiniams integralinis skaičiavimas sunkiau sekasi, jau 1929 m. programa buvo pradėta pristinti. Ji buvo toliau tobulinta ir programai pritarta matematikos, fizikos, chemijos ir kosmografijos mokytojų antrojoje konferencijoje, įvykusioje 1929 m. [3]. Pasak profesoriaus Z. Žemaičio, įvedimas „apibrėžtinių integralų tūriams ir paviršiams skaičiuoti yra gražus kurso užbaigimas, vaizdžiai mokiniams įrodąs aukštosios matematikos naudingumą“ [2]. Matematikos mokytojas Jonas Mašiotas (1897–1953) samprotavo kiek kitaip: „VIII klasėje žymiai padidintas integrinio skaičiavimo ir analizinės geometrijos kursas; be to reikalaujama, kad naujoji medžiaga būtų plečiama, gilinama. Kurso dalies nukėlimas ir jos įterpimas įvairiose žemesniųjų klasių kurso vietose dar nesudaro rimto pagrindo VIII kl. jau ir taip nemažam kursui didinti. <...> Nesuprantama, dėl ko VI kl. geometrijos kursas pradedamas begalinėmis mažybėmis bei jų veiksmiais. Aplamai šis veiksmų metodas reikia keisti kitu, natūralesniu, mokiniams suprantamesniu metodu“ [2]. Matematikos prof. Viktoras Biržiška (1886–1964) iš VIII klasės kurso siūlė

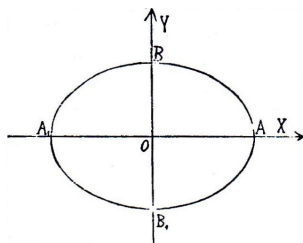
„visiškai išbraukti ir apibrėžtiniai integralai ir jų pritaikymas įvairioms problemoms, nes nei viena apibrėžtinio integralo sąvoka, būtent Cauchy, Riemann'o, Lebeque, Peron'o ir kt. nėra paprasta ir be abejo liks nesuprantama mokiniam. Galiausiai neaišku, kas yra kreivių ploto sąvoka, kaip tatai figūruoja VIII klasės kurse“ [2].

Jau minėto J. Stoukaus vadovėlio „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ diferencialinio skaičiavimo taikomojo pobūdžio skyriuose „Funkcijų kitimo tyrimas“ ir „Antralaipsnių kreivųjų liečiamosios ir normalės“ yra temos: funkcijos didėjimas ir mažėjimas, Rolio ir Lagranžo teoremos, geometrinis Rolio ir Lagranžo teoremos vaizdavimas, funkcijos maksimumas ir minimumas, būtinoji funkcijosėjimo per savo maksimumą arba minimumą sąlyga, liestinės ir normalės, elipsės, hiperbolės, parabolės liestinė ir normalė. J. Stoukaus vadovėlyje „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ yra ir integralinio skaičiavimo temos: neapibrėžtinio integralo sąvoka, pagrindinės integralo savybės, integravimas skaidymu, integravimas keičiant kintamąjį, integravimas dalimis, geometrinė integralo prasmė, apibrėžtinio integralo sąvoka, apibrėžtinis integralas kaip sumos riba, plotų skaičiavimo pavyzdžiai. Beveik visos diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų temos tos pačios kaip ir dabartiniuose vadovėliuose. Vadovėlyje po teorinių temų yra per mažai išspręsta pavyzdžių, lyginant su dabartiniais vadovėliais. Knygoje „Begalinių mažybių analizio pagrindai“, įrodžius kiekvieną funkcijų diferencijavimo taisyklę, atitinkamai paaiškinama funkcijų diferencialų taisyklė. J. Stoukus, kaip ir dabartiniuose vadovėliuose, temą „Neapibrėžtinio integralo sąvoka“ pradeda aiškinti tuo, kad integravimas yra atvirkštinis veiksmas diferencijavimui ir neapibrėžtinį integralą apibrėžia panašiai kaip dabartiniai matematikai, tik nenaudoja pirmykštės funkcijos pavadinimo. Vadovėlyje „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ temoje „Plotų skaičiavimo pavyzdžiai“ skaičiuojami plotai kreivių, kurių lygtys užrašytos bendroju pavidalu, ir labiau orientuojamasi į sudėtingų integralų skaičiavimą. Iliustravimui pateikiamas pavyzdys iš J. Stoukaus vadovėlio.

Elipsė užrašoma „ašinėmis lygtimis“ (žr. 1 pav.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pirmiausia integruojama elipsės ploto dalis  $OAB$ , kuri yra tarp teigiamų koordinačių ašių krypčių, o paskui gautasis rezultatas dauginamas iš 4. Šiuo atveju „kreivo-



1 pav.

sios“ (kreivės) lygtis yra

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

integralo apatinis rėžis yra 0, viršutinis rėžis yra  $a$ . Todėl elipsės ketvirčio plotas  $S$  išreiškiamas integralu

$$S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Remiamasi temos „Integravimas naujo kintamojo įvedimu“ pavyzdžiu, kuriame parodyta, kad neapibrėžtinis integralas

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Taigi

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{a} \Big|_0^a \left( \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) \\ &= \frac{b}{a} \left[ \left( \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - a^2} \right) - \left( \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{0}{a} + \frac{0}{2} \sqrt{a^2 - 0} \right) \right] \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \arcsin 1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

„Elipsio“ plotas bus lygus [10]:

$$4S = \pi ab.$$

Dabartiniai matematikai vadovėliuose teikiamuose pavyzdžiuose dažniausiai skaičiuoja konkrečių plokščiųjų figūrų plotus.

### Išvados

1918–1928 m. tobulėjo diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų dėstymas mokykloje. Vadovėliuose pateikiamos diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų teorijos lygis toks aukštas, jog be didelių problemų jį galima lyginti su šiuolaikinių vadovėlių skyriais, kuriuose nagrinėjami analizės pradmenys;

1918–1928 m. ir šiuolaikinių vadovėlių diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų išdėstymas bei pateikimas yra labai panašus. Nedidelių problemų būtų tik su matematine terminija (pavyzdžiui, „pastovi tiekybė“ – konstanta, „tarpas“ – intervalas, „prieauglius“ – pokytis ir kt.);

J. Stoukaus vadovėlio, prof. Z. Žemaičio mokslinių darbų ir mokytojo A. Karaliaus (1889–1940) (jis rašė diferencialinio ir integralinio skaičiavimo mokymo klausimais) straipsnių dėka 1918–1928 m. buvo pažangiai dėstomi diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenys [10,6,8,9].

Matematikos mokymas Lietuvoje 1918–1928 metais buvo organizuotas, modernėjo, rėmėsi Vakarų Europos pavyzdžiu. Tai liudija: nepriklausomybės metais tobulinta, atsižvelgiant į vykdomas švietimo reformas, matematikos programa (1923); svarbūs įvykiai – Lietuvos matematikos, fizikos ir kosmografijos mokytojų konferencijos (1928, 1929), kuriose buvo priimta moderni nauja matematikos programa; kuriami ir pertvarkomi matematikos dalykų (tarp jų ir J. Stoukaus „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ (1925)) mokykliniai vadovėliai.

### Literatūra

1. Švietimo ministerijos aukštesniųjų ir vidurinių bendrojo lavinimo mokyklų direktoriams. Mokomosios medžiagos suskirstymas. Lietuvos Respublika, Aukštesniojo mokslo departamentas, 1923 m. lapkričio mėn. 15 d. Nr. 11196. *Švietimo darbas*, 10:689, 1923.
2. Matematikos, fizikos, kosmografijos ir chemijos mokytojų konferencija. *Švietimo darbas*, 3:246–248, 1929.
3. Matematikos programa aukštesniosioms mokykloms. *Švietimo darbas*, 7:662–675, 1929.
4. A. Ažubalis. *Matematika lietuviškoje mokykloje (XIX a.pr. – 1940 m.)*. Žiburio leidykla, Vilnius, 1997.
5. J. Banionis, *Matematinė mintis Lietuvoje*. Vilniaus pedagoginio universiteto leidykla, Vilnius, 2006.
6. Z. Žemaitis. Begalinių mažybių analizio pagrindai. *Švietimo darbas*, 6:728–730, 1926.
7. J. Golcbergas. Matematikos dėstymo tikslas ir programa aukštesniosiose mokyklose. Kn.: A. Kasakaitis (red.), *Pirmosios matematikos ir fizikos 1928 m. sausio 3–5 d. mokytojų konferencijos darbai, Klaipėda, Lietuva*. Akcinė „Ryto“ bendrovė, Klaipėda, 1928, 55.
8. A. Karalius. Be galo mažų tiektybių skaičiuotė. *Švietimo darbas*, 3:261–269, 1927.
9. A. Karalius. Paprasti uždaviniai. *Švietimo darbas*, 6:529–532, 1927.
10. J. Stoukus. *Begalinių mažybių analizio pagrindai. Vadovėlis aukštesniosioms mokykloms*. „Vyties“ bendrovės leidinys, Kaunas, 1925.

### SUMMARY

***J. Kastickaitė and J. Banionis. Teaching of differential and integral calculation basics in Lithuanian schools before the teaching reform in mathematics (in 1918–1928)***

The article discusses teaching of differential and integral calculation fundamentals before the reform in the teaching of mathematics (1918-1928) with reference to the textbook of Juozas Stoukus “Basics of Infinite Smallness Analysis”, contemporary curricula of higher schools and articles of mathematicians.

**Keywords:** differential calculation, integral calculation, function, conference of Merany, reform in teaching.