Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 125–128

Lošimo kauliukas ir tikimybės

Eugenijus STANKUS
Vilniaus universitetas, Matematios ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
el. paštas: eugenijus.stankus@mif.vu.lt

Santrauka. Lošimo kauliukas nuo pat tikimybių teorijos atsiradimo yra viena iš pagrindinių tikimybių teorijos sąvokų demonstravimo priemonių. Sraipsnyje apžvelgiamos tikimybių teorijos sąvokos Tikimybinė erdvė, Įvykis ir jo tikimybė, Įvykių priklausomumas, Atsitiktinis dydis ir jų iliustravimo panaudojant lošimo kauliuką galimybės, pateikiama pavyzdžių.

Raktiniai žodžiai: atsitiktinis dydis, įvykis, įvykių priklausomumas, lošimo kauliukas, tikimybė.

Taisyklingas šešiasienis lošimo kauliukas žmonijai žinomas labai seniai – Irako teritorijoje rastas toks kauliukas, pagamintas net prieš 3000 m. pr. Kr. Į Europą lošimo kauliukas atėjo vėliau – juo buvo lošiama Senovės Egipte, vėliau Graikijoje ir Romos Imperijoje. Apie lošimus kauliuku rašoma ir pirmosiose tikimybių teorijos (kalbant šiuolaikiškai) knygose ir straipsniuose (Girolamo Cardano „De Ludo Alcae", Galileo Galilėjus „Sopra le Scoperte dei Dadi" , Luca Paciolis „Suma"). Taigi lošimo kauliuku lošiama labai seniai. Kuris lošiantysis išloš, o kuris praloš, lemia atitinkamos sienelės atsivertimas metus kauliuką. O kuria sienele jis atsivers, niekas iš anksto nežino – aišku tik, kad viena iš šešių. Žinoma, lošėjas norėtų įvertinti savo galimybes laimėti. Šioms problemoms tyrinėti ir buvo skirtos pirmosios knygos, kurios pasitarnavo naujos mokslo šakos – tikimybių teorijos – atsiradimui.

Pažvelgus į gilią istorinę lošimo kauliuko praeitį, būtų galima sakyti, kad lošimo kauliukas jau pabodęs. Tačiau ir dėstant šiuolaikinę tikimybių teoriją, lošimo kauliukas lieka labai tinkamas iliustracinis instrumentas. Juo galima pademonstruoti daugelį tikimybių teorijos sąvokų – faktiškai išdėstyti tikimybių teorijos pagrindus. Tikriausiai nerastume vadovėlio, kuriame bent kartą nebūtų panaudotas lošimo kauliukas – ar demonstruojant tikimybinę erdvę, ar konstruojant atsitiktinius dydžius, ar skaičiuojant kartojamų bandymų įvykių tikimybes ir pan.

Puikus „senų" fundamentalių dalykų išlikimo pavyzdys yra Euklido (IV a. pr. Kr.) geometrija, kuri davė ir duoda daug medžiagos dabartinės geometrijos mokslui ir išliko beveik nepakitusi iki šių dienų.

Panagrinėkime lošimo kauliuko taikymo galimybes iliustruojant tikimybių teorijos sąvokas.

Kiekvienas atsitiktinis įvykis gali įvykti arba neįvykti tik esant tam tikroms sąlygoms. Šių sąlygų kompleksas vadinamas bandymu, kuriame stebime tiriamąjį įvykį. Kalbant apie tai, natūralu pateikti paprasčiausią – monetos metimo – pavyzdį, tačiau čia lošimo kauliuko metimas tiktų labiau – kaip bandymas su didesniu galimų rezultatų (baigčių) skaičiumi. Kai konstruojame bandymo matematinį modelį – baigtinę tikimybinę erdvę – lošimo kauliuko metimo bandymo baigčių aibė $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6; \}$ yra gana plati ir todėl patogi sudarant su bandymu susijusius įvykius. Galime kalbėti apie baigtis, palankias, pavyzdžiui, įvykiui „atsivers lyginis akučių skaičius" ar įvykiui „atsivers ne mažiau kaip 5 akutės" ir pan. Šiuo bandymu patogu pademonstruoti įvykio formalizavimo procesą, – kaip įvykis sutapatinamas su šiam įvykiui palankių baigčių aibe, taip pat lengvai demonstruojami veiksmai su įvykiais, būtinasis ir negalimasis įvykiai, nesunkiai apskaičiuojama kiek iš viso įvykių galime sudaryti. Įvykius, sudarytus iš vienos baigties, $E_1 = \{\omega_1\}$, $E_2 = \{\omega_2\}$, ..., $E_6 = \{\omega_6\}$ pavadinę elementariaisiais įvykiais, matome, kad kiekvienas įvykis yra tam tikrų elementariųjų įvykių sąjunga. Šiame bandyme visai nesudėtinga pateikti dviejų nesutaikomų ar trijų poromis nesutaikomų įvykių pavyzdžių. Tokių galimybių neturime nagrinėdami monetos metimą.

Lošimo kauliuko vieno metimo įvykių tikimybės pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą apskaičiuojamos labai lengvai. Tokie pavyzdžiai, mokant įvykių tikimybių skaičiavimo, akcentuoja, kad klasikinis apibrėžimas taikomas tik vienodai galimų baigčių atveju, kas šiame bandyme akivaizdu. Nagrinėjant du ar daugiau lošimo kauliuko metimų, turime galimybę pademonstruoti sudėtingesnę baigčių aibę bei iš tokių baigčių sudarytus sudėtingesnius įvykius, kurių tikimybes galima apskaičiuoti tiek pagal klasikinį apibrėžimą, tiek naudojant kitas formules.

Pateiksime vieną uždavinį iš [3] knygos. Metami $6n$ taisyklingų lošimo kauliukų. Apskaičiuokime tikimybę, kad kiekvienas akučių skaičius (1, 2, 3, 4, 5 ir 6) atsivers lygiai po n kartų (įvykis A).

Tai puikus klasikinio tikimybės apibrėžimo taikymo pavyzdys. Vienodai galimų baigčių iš viso yra 6^{6n}. Kadangi palankių nagrinėjamam įvykiui baigčių skaičius lygus

$$C_{6n}^n \cdot C_{5n}^n \cdot C_{4n}^n \cdot C_{3n}^n \cdot C_{2n}^n = \frac{(6n)!}{n!(5n)!} \cdot \frac{(5n)!}{n!(4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{n!(3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!(n)!} = \frac{(6n)!}{(n!)^6},$$

tai jo tikimybė yra

$$P(A) = \frac{(6n)!}{(n!)^6\, 6^{6n}}.$$

Kita vertus, ir su lošimo kauliuko metimo įvykių tikimybių skaičiavimu ne iš karto viskas buvo aišku.

Pavyzdžiui, vienas iš lošimo kauliuko paradoksų [4] yra toks. Kai metami du vienodi taisyklingi kauliukai, tai abiejų kauliukų atsivertusių akučių sumos 9 ir 10 gaunamos dviem būdais $9 = 3 + 6 = 4 + 5$ ir $10 = 4 + 6 = 5 + 5$, tačiau sumos 9 pasirodymo tikimybė yra didesnė, negu 10 pasirodymo: $\frac{4}{36} > \frac{3}{36}$. Kai metami trys kauliukai, tai sumos 9 ir 10 gaunamos šešiais būdais $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2+3+4 = 2+2+5 = 3+3+3$ ir $10 = 1+3+6 = 2+3+5 = 3+3+4 = 1+4+5 = 2+4+4 = 2+2+6$, tačiau dabar jau 10 pasirodymo tikimybė yra didesnė: $\frac{25}{216} < \frac{27}{216}$. Dabartiniais laikais šis pastebėjimas nėra joks paradoksas – užtenka pritaikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą (prieš tai įdėmiai suskaičiavus, kiek yra iš viso vienodai galimų baigčių ir kiek yra palankių nagrinėjamiems įvykiams).

Norėdami pademonstruoti sąlyginę įvykio tikimybę, nepriklausomus ir priklausomus įvykius, paprastai nagrinėjame dviejų skirtingų spalvų lošimo kauliukų (pavyzdžiui, balto ir juodo) metimą, turintį 36 vienodai galimas baigtis.

Tegu A yra įvykis, kad baltasis kauliukas atsivers šešiomis akutėmis, o B – kad juodasis atsivers penkiomis arba šešiomis akutėmis. Tuomet $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, o $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$. Taigi A ir B yra nepriklausomi įvykiai.

Norint pailiustruoti įvykio sąlyginę tikimybę ir tikimybių daugybos formulę priklausomiems įvykiams, baltojo ir juodojo kauliuko metime galima nagrinėti įvykį C, kad atsivertusių akučių suma lygi 5, ir D – kad juodasis kauliukas atsivertė lyginiu akučių skaičiumi. Tuomet $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(C \cap D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, sąlyginė tikimybė $P(D|C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ir $P(C \cap D) = \frac{1}{18} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = P(C) \cdot P(D|C)$.

Atkreipkime dėmesį, kad pastarąsias sąvokas galima pademonstruoti ir vieno kauliuko metimo įvykiais. Tegu $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3\}$, $B = \{\omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5\}$. Tuomet $A \cap B = \{\omega_2; \omega_3\}$. Apskaičiuokime šių įvykių tikimybes: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = P(A) \cdot P(B)$. Vadinasi, įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Tačiau to paties bandymo įvykiai $C = \{\omega_2; \omega_3; \omega_4\}$ ir $D = \{\omega_3; \omega_4; \omega_5\}$ yra priklausomi, nes $P(C \cap D) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = P(C) \cdot P(D|C)$. Čia $P(D|C)$ yra sąlyginė tikimybė įvykti D, kai žinoma, jog C įvykęs. Įvykio C įvykimas šiuo atveju laikomas tam tikros papildomos informacijos suteikimu skaičiuojant įvykio D tikimybę (įvykio D „besąlyginė" tikimybė yra $\frac{1}{2}$).

Atsitiktinis dydis yra funkcija, apibrėžta baigčių aibėje. Lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibės elementams lengva priskirti įvairias realiąsias reikšmes ir tuo pačiu sukonstruoti įvairius atsitiktinius dydžius, susietus su lošimo kauliuko metimu. Paprasčiausia tokia funkcija, žinoma, yra $f(\omega_i) = i$, $i = 1, 2, \ldots 6$, baigtims priskirianti skaičius ant atsivertusios kauliuko sienelės.

Jeigu lošimo kauliuką mesime n kartų, tai turėsime patogią nepriklausomų bandymų (Bernulio bandymų) seką. Stebėdami kurį nors įvykį (pavyzdžiui, šešiukės atsivertimą), galime įvesti binominį atsitiktinį dydį.

Taigi, lošimo kauliuko metimai iki šiol yra neišsemiama pavyzdžių ir iliustracijų aibė. Jais galima pademonstruoti tikimybių teorijos sąvokas, įvairius tikimybių teorijos teiginius, sukonstruoti daugybę uždavinių įvairiomis tikimybių teorijos temomis. Vadinasi, dar ne laikas atsisakyti šios puikios tikimybinės priemonės.

Literatūra

1. A. Apynis, E. Stankus. *Matematika*. Vilnius, TEV, 2001.
2. W. F. Bialas. *Lecture Notes in Applied Probability*. University of Buffalo, New York, 2005.
3. Y. Suhov, M. Kelbert. *Probability and Statistics by Example*. Vol. 1. *Basic Probability and Statistics*. Cambridge University Press, 2005.
4. G. J. Szekely. *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*. Kluwer Academic print on demand, 2002.

SUMMARY

E. Stankus. Dice and probabilities

From the very birth of probability theory, the dice is one of the main means used to demonstrate the concepts of probability theory. In this article the illustration of various concepts of probability theory by experiments of rolling the dice is being investigated.

Keywords: dependence of events, dice, event, probability, random variable.