Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 84–89

2009 m. VPU Jaunųjų matematikų olimpiados apžvalga

Eglė JAKAITYTĖ, Edmundas MAZĖTIS

Vilniaus pedagoginis universitetas
Studentų g. 24, LT-08106, Vilnius
el. paštas: egle.jakaityte@gmail.com; edumndas@vpu.lt

Santrauka. Straipsnyje aptariama 2009 m. VPU jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai, jų sprendimai bei trumpa Lietuvos matematikų olimpiadinio judėjimo statistinė analizė.

Raktiniai žodžiai: koreliacinis laukas, pasikliauties intervalas, diagrama, hipotezė, koreliacijos koeficientas.

Siekdami, kad į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadas patektų visi stipriausieji, olimpiadų organizatoriai nusprendė vykdyti atrankines olimpiadas, kuriose galėtų dalyvauti visi norintieji, iš kurių galima būtų atrinkti pačius geriausius. Tokie atrankiniai turai vykdomi nuo 1992 metų. Tai Kauno technologijos universiteto prof. S. Matulionio konkursas, Šiaulių universiteto matematikų olimpiada ir Vilniaus pedagoginio universiteto jaunųjų matematikų olimpiada.

2009 m. kovo 14 d. vyko jau XVIII jaunųjų matematikų olimpiada. Užduotis parengė VPU MIF Matematinės analizės ir geometrijos katedros docentai A. Kaučikas ir E. Mazėtis.

9 klasė

1. 10 *t krovinys išfasuotas į nebūtinai vienodo svorio maišus. Kiekvienas maišas sveria mažiau nei vieną toną. Vienas sunkvežimis gali vežti ne daugiau kaip tris tonas krovinio. Kiek mažiausiai reikės sunkvežimių, norint visada išvežti nurodytu būdu bet kaip išfasuotą krovinį*?

   Visuomet užteks 5 sunkvežimių, nes kiekvieną sunkvežimį galima krauti iki tol, kol krovinio masė jame viršys 2 tonas. Kad neužtenka 4 sunkvežimių rodo toks atvejis, kai visas krovinys supilstytas į 13 maišų, po $\frac{10}{13}$ tonos kiekviename.

2. *Du dviženklius skaičius užrašius greta, gautasis keturženklis skaičius dalijasi iš tų dviženklių skaičių sandaugos. Raskite šiuos skaičius.*

   Sakykime, kad vienas skaičius x, o kitas y. Tuomet pagal sąlygą $100x + y = kxy$. Iš čia $x = \frac{y}{kx-100}$. Kadangi x ir y dviženkliai skaičiai, tai $0 < kx - 100 < 10$, t.y. $100 < kx < 110$. Sudėtinius skaičius 102, 104, 105, 106, 108 išskaidę dviejų natūraliųjų skaičių, kurių vienas dviženklis, sandauga visais galimais atvejais, gauname, kad uždavinio sąlygą tenkina du išskaidymai: $102 = 6 \cdot 17$ ir $104 = 8 \cdot 13$. Todėl $y = 13$, $x = 52$ ir $y = 17$, $x = 34$.

3. *Skaičiai a, b, c – bet kurie nelyginiai skaičiai. Ar visada bent vienas iš šių skaičių $ab-1$, $bc-1$, $ca-1$ dalijasi iš 4?*

   Nelyginį skaičių dalijan iš 4, gaunamos liekanos 1 arba 3. Pagal Dirichle principą bent dviejų skaičių liekanos vienodos. Tuomet tų skaičių sandaugos liekana yra lygi 1. Taigi vienetu mažesnio skaičiaus liekana yra 0, t.y. jis dalijasi iš 4.

4. *Taškas K yra stačiakampio $ABCD$ kraštinėje CD. Sulenkus stačiakampį tiese BK, taškas C atsiduria kraštinės AD vidurio taške E. Raskite atkarpų DK ir KC santykį* (1 pav.).

   Pagal sąlygą $CE \perp BK$, $CK = KE$, $BE = BC$, $\angle CEK = \angle ECD$. Kadangi $AE = \frac{1}{2}BE$, tai $\angle ABE = 30^0$, $\angle EBC = 60^0$ ir trikampis BEC lygiakraštis. Tada $\angle ECD = \angle CEK = 30^0$, todėl $\angle KED = 180^0 - 60^0 - 60^0 - 30^0 = 30^0$. Todėl $KD = \frac{1}{2}KE = \frac{1}{2}KC$ ir ieškomasis santykis yra 1 : 2.

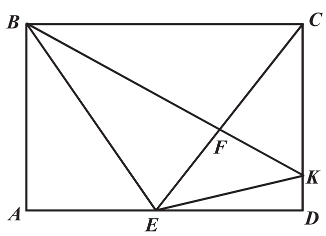
10 klasė

1. *Kiekvienas iš skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra lygus 1 arba -1. Žinome, kad $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1 = 0$. Su kokiais n ir kaip tai įmanoma?*

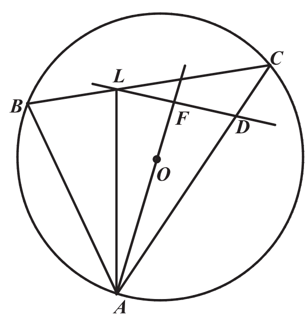
   Kadangi sumoje yra n dėmenų, tai pusė iš jų lygūs -1, o pusė 1, taigi n – lyginis skaičius. Jei vieną iš skaičių pakeisime priešingu, tai du nariai pakeis ženklą, t.y. jie arba padidės arba sumažės dviem vienetais. Taigi suma arba nesikeis arba padidės 4 vienetais arba sumažės 4 vienetais, t.y. jos liekana, gauta dalijant iš 4 nesikeis. Akivaizdu, kad taip keičiant galima pasiekti, jog visi $x_i = 1$, tuomet suma yra n. Kadangi liekana dalijant iš 4 nesikeičia, tai n dalijasi iš 4. Pateikiame tokio išdėstymo pavyzdį: $x_i = 1$, kai $i \neq 4m-1$ ir $x_{4m-1} = -1$, čia $m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{4}$.

2. *Su kokiais sveikaisiais x, y, z jie yra trys iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai, o skaičiai $5x+3$, y^2, $3z+5$ yra trys iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai?*

   Pagal sąlygą $y^2 = xz = \frac{5x+3z+8}{2}$. Iš čia $x = \frac{3z+8}{2z-5} = \frac{1}{2}(3 + \frac{31}{2z-5})$. Iš čia $2z-5 = \pm 1$ arba $2z-5 = \pm 31$. patikrinimas rodo, kad tinka tik $2z-5 = 31$. Iš čia $x = 2$, $y = \pm 6$, $z = 18$.



1 pav.



2 pav.

3. *Kiek daugiausia galima rasti skirtingų natūraliųjų skaičių tokių, kad bet kurių trijų iš jų suma būtų pirminis skaičius*?

   4 tokius skaičius galima rasti pvz. 1, 3, 7, 9. Tarkime, kad yra 5 tokie skaičiai. Dalijant juos iš 3 gali gautis visos liekanos 0, 1, 2 arba mažiau nei 3 liekanos. Pirmuoju atveju tų trijų skaičių, kurių liekanos skirtingos, suma dalijasi iš 3. Antruoju atveju bent trijų skaičių liekanos vienodos, jų suma dalijasi iš 3. Prieštara.

4. *Smailiojo trikampio ABC pusiaukampinė AL, taškas O – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras. Kraštinėje AC pažymėtas taškas D, kad $AD = AB$. Raskite kampą tarp tiesių AO ir DL* (2 pav.).

   Pastebime, kad $\angle AOC = 2\angle B$ ir $\angle OAC = 90^0 - \angle B$. Iš trikampių ABL ir ADL lygumo seka, kad $\angle ADL = \angle B$. Tuomet $\angle AFC = 90^0$.

11 klasė

1. *Ar kiekvienam pirminiam skaičiui p galima surasti be galo daug natūraliųjų skaičių n, su kuriais $2^n - n$ dalijasi iš p.*

   Pagal mažąją Ferma teoremą $2^{p-1} - 1$ dalijasi iš p visiems pirminiams $p \neq 2$. Sakykime, kad $n = (p-1)k$, čia $k \in \mathbb{N}$. Tuomet $2^n - n = (2^k)^{p-1} - kp + k$. $(2^k)^{p-1} - 1$ dalijasi iš p, todėl $2^n - n = (2^{k(p-1)} - 1 - kp) + 1 + k$ dalijasi iš p tada, kai $1 + k = tp$, čia $t \in \mathbb{N}$. Taigi paėmus $n = (tp-1)(p-1)$, čia $t \in \mathbb{N}$ gauname be galo daug skaičių n, tenkinančių uždavinio sąlygą. Kai $p = 2$, uždavinio sąlygą tenkina bet kuris lyginis n.

2. *Realieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0; 1]$. Įrodykite, kad teisinga nelygybė $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$.*

   Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+1}{2} \geqslant \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$ arba $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geqslant 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Kadangi $0 \leqslant x_i < 1$, tai $x_i^2 \leqslant x_i$ visiems $i = 1, 2, \ldots, n$, tai $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Iš čia ir gaunama įrodomoji nelygybė.

3. *Trikampio ABC aukštinės BD ir CE kerta apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą atitinkamai taškuose B_1 ir C_1. Tiesė B_1C_1 eina per apskritimo centrą. Raskite trikampio kampą A* (3 pav.).

   Kadangi B_1C_1 – skersmuo, tai $C_1B \perp BB_1$, t.y. $C_1B || AC$. Taigi $\cup AC_1 = \cup BC$. Analogiškai $CB_1 || AB$ ir $\cup AB_1 = \cup BC$. Iš čia $\cup BC = \frac{1}{2} \cup B_1C_1 = 90^0$. Taigi $\angle A = 45^0$.

4. *Ar iš* 100 *faktorialų sandaugos* $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$ *galima išbraukti vieną faktorialą $k!$, kad likusi sandauga būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas*?

   Duotasis skaičius $N = 1^{100} \cdot 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot \ldots \cdot 99^2 \cdot 100^1 = m^2 \cdot 2^{99} \cdot 4^{97} \cdot \ldots \cdot 98^3 \cdot 100$, čia $m^2 = 1^{100} \cdot 3^{98} \cdot 5^{96} \cdot \ldots \cdot 99^2$. Tuomet $N = m^2 \cdot 2^{98} \cdot 2 \cdot 4^{96} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6^{94} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 98^2 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 50 = m^2 \cdot 2^{98} \cdot 4^{96} \cdot 6^{94} \cdot \ldots \cdot 98^2 \cdot 2^{50} \cdot 50!$. Taigi akivaizdu, kad reikia išbraukti 50!.

12 klasė

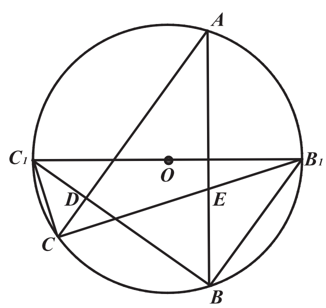
1. Žr. 11 kl. 1 užd.
2. Žr. 11 kl. 2 užd.
3. *Raskite lygties $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ sveikuosius sprendinius.*

   Pridėję prie abiejų pusių xy gauname $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$. Dviejų gretimų sveikųjų skaičių sandauga yra lygi sveikojo skaičiaus kvadratui tik tada, kai vienas tų skaičių yra 0, t.y. kai $xy = 0$ arba $xy + 1 = 0$. Išnagrinėję galimus atvejus gauname, kad sprendiniai yra tiktai šie $x = 1$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 1$; $x = 0$, $y = 0$.
4. *Trikampio ABC kraštinė $BC = a$. Pusiaukampinė AF kerta apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą taške D ir $AF : FD = k$. Raskite trikampio ABC perimetrą* (4 pav.).

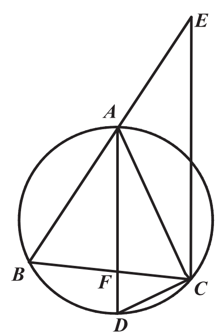
   Iš trikampių CDF ir ADC panašumo seka $\frac{DF}{CD} = \frac{CD}{AD}$. Kadangi $AD = (k+1)DF$, tai iš čia seka, kad $CD^2 = (k + 1)DF^2$, t.y. $\frac{CD}{DF} = \sqrt{k+1}$. Brėžiame $CE||AD$. Akivaizdu, kad trikampis ACE lygiašonis ($AC = AE$), todėl $BE = AB + BC = P - a$, čia P – ieškomasis perimetras. Iš trikampių BCE ir DFC panašumo $\frac{BE}{BC} = \frac{DC}{DF} = \sqrt{k+1}$. Iš čia $P = a(1 + \sqrt{k+1})$.

Olimpiadoje dalyvavo 226 moksleiviai, iš 41 Lietuvos mokyklos. Atsitiktine tvarka buvo anketuojama 113 olimpiados dalyvių (36 mergaitės ir 77 berniukai). Moksleiviai turėjo atsakyti ar jie dažnai dalyvauja olimpiadose, ar yra jose laimeję, kas juos skatina tai daryti, kaip jie ruošiasi įvairiems konkursams, bei buvo prašoma nurodyti, kokio tipo uždaviniai olimpiadose jiems yra sunkiausi. Daugiausiai dalyvių atvyko iš Vilniaus apskrities, gerokai mažiau jų buvo iš Kauno ir Klaipėdos apskričių. Beveik trečdalis dalyvių jau turėjo kvietimus į Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadą, dar 10 pakviesta po VPU konkurso.

Moksleivių klausėme, kokiose olimpiadose jie dar yra dalyvavę. Atsakymuose dažniausiai minimos mokyklų matematikos olimpiados (107), Kengūros konkursas (107),



3 pav.



4 pav.

miestų bei rajonų olimpiados (93). Tarp apklaustųjų olimpiados dalyvių apie 70% jau yra laimėję kitose olimpiadose, tame tarpe ir tarptautinėse. Dalyvauti olimpiadose moksleivis dažniausiai ryžtasi norėdamas išbandyti save arba jį paskatina mokytojas. Moksleivių manymu, sunkiausiai jiems sekasi geometrijos uždaviniai (apie 40%) ir kombinatorikos bei strategijų kūrimo uždaviniai (apie 20%).

Olimpiados rezultatai rodo, kad didelei daliai moksleivių buvo sunkūs visų tipų uždaviniai. Geometrijos uždavinį sėkmingai išsprendė tik po 7 dešimtokus ir vienuoliktokus, tai tikrai vienas iš sunkiausių uždavinių pagal surinktus taškus. Sunkesnis už geometrijos dešimtokams pasirodė 2 uždavinys, t.y. lygčių ir lygčių sistemų uždavinys.

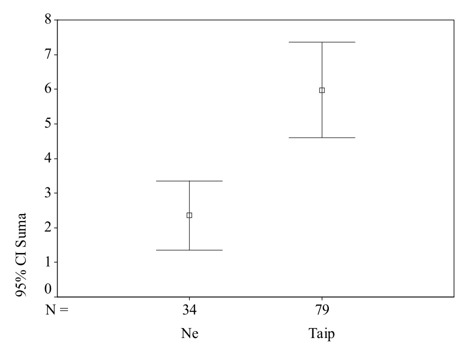
Tyrėme skirtumus tarp mergaičių ir berniukų surinktų taškų. Vidutiniškai vienas berniukas surinko 4,87 balo, o mergaitė – 4,92 balo. Pastebėta, kad tik Vilniaus ir Klaipėdos apskričių mergaitės pasirodė vidutiniškai geriau už savo apskričių berniukus.

Kadangi mergaičių surinktų taškų vidurkis yra didesnis, tai darome prielaidą: mergaitės geriau sprendžia olimpiadinius uždavinius negu berniukai. Hipotezei tikrinti taikėme SPSS paketą [1,2]. Tikrinome, ar pasiekimų skirtumai tarp lyčių yra statistiškai reikšmingi ir gavome, kad populiacijų dispersijos statistiškai reikšmingai nesiskiria ir moksleivių rezultatai nepriklauso nuo jų lyties.

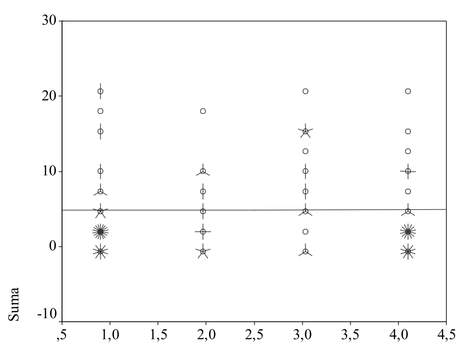
Kėlėme hipotezę, kad dažni laimėjimai įvairiose olimpiadose yra statistiškai reikšmingi VPU konkurse surinktų taškų skaičiui. Pasikliauties intervalų diagrama (5 pav.) aiškiai demonstruoja, kad dažnai laimintys įvairiose olimpiadose ir VPU konkurse surinko daugiau taškų. Iš čia seka, kad iškeltosios hipotezės nėra pagrindo atmesti.

Domėjomės, ar ruošimosi olimpiadai pobūdis įtakoja rezultatus VPU konkurse. Koreliacinis laukas (6 pav.) rodo, kad rezultatai nepriklauso nuo ruošimosi būdo.

Nagrinėjome, ar pasiekti rezultatai VPU olimpiadoje priklauso nuo dalyvio statuso (nepakviestas, kviečiamas VPU, pakviestas): pakviestieji ir kviečiamieji pasirodė stipriai geriau už likusiuosius. Apskaičiavome statistinio ryšio koeficientą $r = 0,771$, kuris rodo stiprų ryšį tarp požymių.



5 pav. Laimėjimai kitose olimpiadose.



6 pav. Pasiruošimas olimpiadai.

Išvados

VPU konkurse dalyvauja moksleiviai, jau ne kartą dalyvavę įvairiose olimpiadose, bet pateikti uždaviniai jiems pasirodė sunkūs, ypač geometrijos. Mergaičių ir berniukų pasiekti rezultatai statistiškai nesiskiria. Rezultatams taip pat neturi įtakos ruošimosi pobūdis bei nuostata į olimpiadą.

Literatūra

1. J. Kruopis. *Matematinė statistika*, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1993.
2. T. Leonavičienė. *SPSS programų paketo taikymas statistiniuose tyrimuose*. Vilniaus pedagoginio universiteto leidykla, Vilnius, 2006.

SUMMARY

E. Jakaitytė, E. Mazėtis. Survey of VPU olympiad for young mathematicians

The article presents problems of VPU Young Mathematicians‘ Olympiad 2009, their solution and a short statistical anglysis of Lithuanian Olympiad movemenr of mathematicians.

Keywords: correlation field, correlation factor, hyphotesis, chart, confidience segment.