Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 36–40

Osciliuojančiojo integralo asimptotinis įvertis

Aleksandras KRYLOVAS
Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Mykolo Romerio universitetas
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
el. paštas: akr@fm.vgtu.lt; krylovas@mruni.lt

Santrauka. Nagrinėjamas straipsnyje osciliuojantis integralas atsiranda taikant vidurkinimo metodą silpnai netiesinėms diferencialinėms sistemoms. Gautas tolygiai tinkamas parametrų atžvilgiu integralo įvertis leidžia pagrįsti vidurkinimo metodą kai kuriems netiesinių bangų sąveikos modeliams.

Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos.

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime osciliuojantį integralą

$$I_{\vec{l}}^{\varepsilon}(\tau) = \int_0^{\tau} g_{\vec{l}}(s)\, e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s l_1\alpha_1(r)+\cdots+l_n\alpha_n(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s, \tag{1}$$

čia $\tau \in [0, \tau_0]$, $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathcal{Z}^n$, $g_{\vec{l}}(\tau) \in C^p[0, \tau_0]$, $\alpha_j(\tau) \in C^n[0, \tau_0]$.

Nagrinėjamo (1) integralo asimptotinis įvertis, kai $\varepsilon \to 0$ reikalingas sprendžiant silpnai netiesinių hiperbolinių sistemų su lėtai kintančiomis charakteristikomis asimptotinio integravimo uždavinius [2,6]. Kai nagrinėjami periodiniai uždaviniai, nuo šio integralo įverčio priklauso asimptotinio sprendinio, gaunamo iš suvidurkintų lygčių sistemos, paklaida. (1) pavidalo integralai taip pat atsiranda taikant asimptotinio integravimo metodus netiesinėms paprastosioms diferencialinėms lygtims [7].

Pažymėkime $\varphi(s)$ tiesinį darinį (1) integrale. Integralų $I^{\varepsilon} = \int_0^{\tau} g(s) e^{\frac{i\varphi(s)}{\varepsilon}}\,\mathrm{d}s$ asimptotiniai įverčiai išplaukia iš žinomo stacionariosios fazės principo [1]. Pavyzdžiui, $I^{\varepsilon} \sim \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} g(0)\Gamma(\frac{1}{\alpha})\cos\frac{\pi}{2\alpha}$, kai $\varphi(s) = s^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Taigi esant fiksuotam parametrui $\vec{l}$, uždavinys yra gerai ištirtas. Pažymėkime $\|\vec{l}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n l_j^2}$, $l_j^0 = \frac{1}{\|\vec{l}\|} l_j$, $F_{\vec{l}}(\tau) = \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^n l_j^0 \alpha_j(r)\,\mathrm{d}r$, $\tau = \varepsilon t$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|\vec{l}\|}$, $f_{\vec{l}}(\tau) = F_{\vec{l}}'(\tau) = \sum_{j=1}^n l_j^0 \alpha_j(\tau)$. Tada (1) integralą perrašome taip: $\int_0^{\tau} g_{\vec{l}}(s) e^{\frac{i}{\tilde{\varepsilon}} F_{\vec{l}}(s)}\,\mathrm{d}s$. Šio integralo asimptotinės savybės, kai $\tilde{\varepsilon} \to 0$ priklauso nuo funkcijos $f_{\vec{l}} = F_{\vec{l}}'$ nulių τ_j. Jei intervale $[0, \tau_0]$ yra tik baigtinis skaičius ne didesnio kaip n kartotinumo šaknų τ_j, tai $I_{\vec{l}}^{\varepsilon}(\tau) = O(\sqrt[n]{\varepsilon})$, tačiau šis įvertis nebūtinai bus tolygiai tinkamas pagal $\vec{l}$, t. y. bendruoju atveju: $|I_{\vec{l}}^{\varepsilon}(\tau)| \leqslant C_{\vec{l}} \sqrt[n]{\varepsilon}$. Darbuose [3–5] išsamiai ištirtas atvejis $n = 2$. Šio darbo tikslas – gauti pakankamas sąlygas tolygiai tinkamam visiems $\vec{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathcal{Z}^n \setminus \mathcal{L}_0$ integralo $I_{\vec{l}}^{\varepsilon}(\tau)$ asimpotiniam įverčiui, kai n bet kuris natūralusis skaičius. Čia $\mathcal{L}_0 = \{\vec{l}: \ f_{\vec{l}}(\tau) \equiv 0\} \subset \mathcal{Z}^n$.

2. Asimptotinis įvertis

Pažymėkime Vronskio determinanto matricą

$$W(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\tau) & \alpha_2(\tau) & \cdots & \alpha_n(\tau) \\ \alpha_1'(\tau) & \alpha_2'(\tau) & \cdots & \alpha_n'(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(n-1)}(\tau) & \alpha_2^{(n-1)}(\tau) & \cdots & \alpha_n^{(n-1)}(\tau) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Tarkime, kad galioja šie teiginiai ($\forall\tau \in [0, \tau_0]$):

$$|\det W(\tau)| \geqslant w_0 > 0; \tag{3}$$

$$\left|\alpha_j^{(r)}(\tau)\right| \leqslant \beta^0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \ r = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Iš (3) išplaukia, kad egzistuoja atvirkštinė matrica $W^{-1}(\tau) = \|\tilde{w}_{ij}(\tau)\|_{n\times n}$ ir $|\det W^{-1}(\tau)| \geqslant \frac{1}{\omega_0} > 0$. Jei $\|W^{-1}\|$ – bet kuri matricos norma, tai

$$\big(\forall\tau \in \big[0, \ \tau_0\big]\big) \qquad \left\|W^{-1}(\tau)\right\| \geqslant \gamma_0 > 0, \tag{5}$$

nes kitaip egzistuotų toks taškas $\hat{\tau} \in [0, \ \tau_0]$, kai $\det W^{-1}(\hat{\tau}) = 0$.

1 TEOREMA. *Tarkime, kad τ_0 – teigiama konstanta (visos konstantos nepriklauso nuo mažojo parametro ε), $g_{\vec{l}}(\tau) \in C[0, \tau_0]$, $\alpha_j(\tau) \in C^n[0, \tau_0]$, galioja (3)–(5) sąlygos ir ($\forall\tau \in [0, \tau_0]$, $\forall\vec{l} \in Z^n$) $|g_{\vec{l}}(\tau)| \leqslant g_0$, $|\frac{d^r\alpha_j(\tau)}{d\tau^r}| \leqslant \alpha_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $r = 0, 1, \ldots, n$. Tada egzistuoja tokios teigiamos konstantos c_0 ir ε_0, kad ($\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\forall\tau \in [0, \tau_0]$, $\forall\vec{l} \notin \mathcal{L}_0$)*

$$\left|I_{\vec{l}}^{\varepsilon}(\tau)\right| \leqslant c_0 \sqrt[n]{\varepsilon}. \tag{6}$$

3. Pagalbiniai teiginiai

Tarkime, kad $f(x) \in C^n[a, b]$. Žymėsime $\|f^{(j)}\| = \max_{x\in[a,b]}|f^{(j)}(x)|$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

1 LEMA. *Tarkime, kad* ($\forall x_0 \in [a, b]$)

1) $|f^{(r)}(x_0)| = \max\{|f(x_0)|, |f'(x_0)|, \ldots, |f^{(n-1)}(x_0)|\} \geqslant \alpha > 0$,

2) $|f^{(j)}(x_0)| \leqslant \beta$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Tada funkcija f turi intervale $x \in [a, b]$ ne daugiau kaip $n(\frac{(b-a)\beta}{\alpha} + 1)$ nulių.

Įrodymas. Tarkime, kad $a \leqslant x_1^0 \leqslant x_2^0 \leqslant \cdots \leqslant x_n^0 \leqslant b$ ir $f(x_j^0) = 0$. Tada egzistuoja bent $n - 1$ taškas x_j^1: $x_1^0 \leqslant x_1^1 \leqslant x_2^0 \leqslant x_2^1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1}^1 \leqslant x_n^0$, $f'(x_j^1) = 0$. Bendruoju atveju egzistuoja bent $n-k$ taškų x_j^k: $f^{(k)}(x_j^k)=0$, $k=0,1,\dots,n-1$. Todėl $f^{(n-1)}$ turi bent vieną šaknį $x_1^0 \leqslant x_1^{n-1} \leqslant x_n^0$: $f^{(n-1)}(x_1^{n-1})=0$. Pažymėkime $\Delta = x_n^0 - x_1^0$. Tarkime, kad $0 \leqslant r < n$ lemos 1 sąlygos indeksas, kai $x_0 = x_1^{n-1}$. Tada egzistuoja taškas $x_1^0 \leqslant x_1^r \leqslant x_n^0$: $f^{(r)}(x_1^r)=0$ ir $\alpha \leqslant |f^{(r)}(x_1^{n-1})| \leqslant |f^{(r+1)}(\tilde{x}_1^{n-1})| \cdot |x_1^{n-1} - x_0| \leqslant \beta \cdot \Delta$. Iš lemos 2 sąlygos gauname, kad funkcija f gali turėti n šaknų x_j^1 tik esant sąlygai $\Delta \geqslant \frac{\alpha}{\beta}$. Kadangi intervale $[a,b]$ bus ne daugiau kaip $\frac{(b-a)}{\Delta}+1$ ilgio Δ intervalų ir kiekviename iš jų – ne daugiau, kaip n funkcijos f šaknų, gauname lemos įrodymą.

2 LEMA. *Tarkime, kad*
1) $\forall x \in [x_1,x_2]$ $|f^{(r)}(x)| \geqslant \alpha > 0$, $r \geqslant 1$;
2) $\forall x \in (x_1,x_2)$ $f^{(j)}(x) \neq 0$, $j=0,1,\dots,r-1$;
3) $(\forall x \in [x_1,x_2])$ $|f(x)| \leqslant \mu$.
Tada $x_2 - x_1 \leqslant \sqrt[r]{\frac{\mu}{\alpha}}$.

Įrodymas. Taikydami Teiloro formulę, gauname, kad $(\forall x,\ x_0 \in [x_1,x_2])$ $f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(x_0) = f^{(r)}(\tilde{x})(x-x_0)$. Iš lemos 1 ir 2 sąlygų gauname, kad $|f^{(r-1)}(x)| \geqslant \alpha \cdot |x-x_0|$. Kadangi čia x ir x_0 bet kurie intervalo $[x_1,x_2]$ taškai, gauname, kad $|f^{(r-j)}(x)| \geqslant \alpha \cdot |x-x_0|^j$, $j=1,2,\dots,r$. Imame $j=r$, $x=x_2$, $x_1=x_0$ ir taikome lemos 3 sąlygą: $\mu \geqslant \alpha(x_2-x_1)^r$.

3 LEMA. *Tarkime, kad* $\forall x \in [x_1,x_2]$
1) $|f^{(r)}(x)| \geqslant \alpha > 0$, $r \geqslant 1$;
2) $|f(x)| \leqslant \mu$.
Tada $x_2 - x_1 \leqslant 2^r \sqrt[r]{\frac{\mu}{\alpha}}$.

Įrodymas. $f^{(r)}(x)$ intervale $[x_1,x_2]$ yra arba teigiama arba neigiama. Todėl $f^{(r-1)}(x)$ gali turėti ne daugiau kaip vieną nulį: $x_1 \leqslant x_0^1 \leqslant x_2$. Funkcija $f^{(r-2)}(x)$ gali turėti ne daugiau kaip du nulius: $x_1 \leqslant x_1^2 \leqslant x_0^1$ ir $x_0^1 \leqslant x_2^2 \leqslant x_2$. Taigi intervalas $[x_1,x_2]$ suskaidomas į ne daugiau kaip 2^r intervalų (x_j^i, x_l^k), kuriuose funkcija f ir visos jos išvestinės nekeičia ženklo. Taikydami 2 lemą gauname kiekvieno iš šių intervalų ilgio įvertį ir jų visų sumą neviršija $2^r \sqrt[r]{\frac{\mu}{\alpha}}$.

Tarkime, kad $\mu > 0$. Nagrinėsime visus rezonansinius intervalus $x \in (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1,2,\dots,J(\mu)$, kai $|f(x)| \leqslant \mu$. Pažymėkime $\nu_j(\mu) = x_2^j - x_1^j$, $\nu(\mu) = \sum_{j=1}^{J(\mu)} \nu_j(\mu)$.

4 LEMA. *Tarkime, kad galioja* 1 *lemos sąlygos. Tada*

$$\nu(\mu) \leqslant 2^{n+1} n \left(\frac{2(b-a)\beta}{\alpha} + 1 \right) \sqrt[n-1]{\frac{2\mu}{\alpha}}. \tag{7}$$

Įrodymas. Kiekvienam rezonansiniam intervalui (x_1^j, x_2^j) priklauso arba funkcijos $f(x)$ nulis, arba lokalusis ekstremumas. Tarkime, kad $|f^{(r)}(x_1^j)| \geqslant \alpha$. Tada

$|f^{(r)}(x_2^j)| \geqslant \frac{\alpha}{2}$, jei tik $(x_2^j - x_1^j) \leqslant \frac{\alpha}{2\beta}$. Taigi galime suskaidyti intervalą (a, b) į ne daugiau kaip $(\frac{2(b-a)\beta}{\alpha} + 1)$ intervalų, kuriuose galioja nelygybė $|f^{(r)}(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}$. Tada taikydami 1 lemą (kai α pakeista į $\frac{\alpha}{2}$ gauname, kad funkcija f turi ne daugiau kaip $n(\frac{2^n(b-a)\beta}{\alpha} + 1)$ nulių ir (kartojame 1 lemos įrodymą) $(n-1) \cdot (\frac{2^n(b-a)\beta}{\alpha} + 1)$ lokaliųjų ekstremumų. Kiekvienam rezonansiniam intervalui (x_1^j, x_2^j) galioja 3 lemos sąlygos. Taigi matome, kad rezonansų aibę $\bigcup_{j=1}^{J(\mu)}(x_1^j, x_2^j)$ galima suskaidyti į ne daugiau kaip $J_0 = 2n \cdot (\frac{2(b-a)\beta}{\alpha} + 1)$ intervalų, kurių kiekvieno ilgis pagal 3 lemą neviršija $2^n \sqrt[n-1]{\frac{2\mu}{\alpha}}$.

4. Teoremos įrodymas

Tarkime, kad μ mažas teigiamas parametras. Suskaidykime integravimo intervalą $[0, \tau_0]$ į dviejų tipų intervalus (τ_k^m, τ_k^{m+1}): rezonansinius, kai intervale $|f_{\bar{l}}| = |F'_{\bar{l}}| < \mu$ ir nerezonansinius, priešingu atveju. Esant pastarajam, matome, kad funkcija $F_{\bar{l}}$ nekeičia ženklo ir todėl

$$\left|\int_{\tau_n^m}^{\tau_n^{m+1}} g_{\bar{l}}(s)\, e^{\frac{i}{\varepsilon}F_{\bar{l}}(s)}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\frac{\tilde{\varepsilon}}{i}\int_{\tau_n^m}^{\tau_n^{m+1}} \frac{g_{\bar{l}}}{f_{\bar{l}}(s)}\,\mathrm{d}e^{\frac{i}{\varepsilon}F_{\bar{l}}(s)}\right| \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu}2g_0\left(\tau_n^{m+1} - \tau_n^m\right).$$

Taigi visų nerenzonasinių integralų suma neviršija $\frac{2\tilde{\varepsilon}\tau_0 g_0}{\mu}$.

Dabar nagrinėsime rezonansinius intervalus. Pažymėkime vektorių $\vec{f}_{\bar{l}} = (f_{\bar{l}}, f'_{\bar{l}}, \ldots, f_{\bar{l}}^{(n-1)})$. Tada $(\forall\tau \in [0, \tau_0])$ $1 = \|\vec{l}^0\| = \|W^{-1}(\tau) \cdot \vec{f}_{\bar{l}}(\tau)\| \leqslant \|W^{-1}(\tau)\| \cdot \|\vec{f}_{\bar{l}}(\tau)\|$. Todėl $(\forall\tau \in [0, \tau_0])$ $\|\vec{f}_{\bar{l}}(\tau)\| \geqslant \frac{1}{\|W^{-1}(\tau)\|} \geqslant \dfrac{1}{\gamma_0}$. Pasirinkime $\|\vec{f}_{\bar{l}}(\tau)\| = \max_{j=0,1,\ldots,n-1}|f^{(j)}(\tau)|$. Esant $\alpha = \frac{1}{\gamma_0}$ ir $\beta = n\beta_0$, funkcijai $f_{\bar{l}}(\tau)$ galioja 1–4 lemų teiginiai. Sudėję nerezonansinių ir rezonansinių integralų įverčius 4 lemoje, gauname

$$\left|I_{\bar{l}}^{\varepsilon}(\tau)\right| \leqslant \frac{2\tilde{\varepsilon}\tau_0 g_0}{\mu} + g_0\nu(\mu). \tag{8}$$

Pasirinkę $\mu = \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}$, gausime (6) įvertį. Konstantą c_0 gauname iš (8) ir (7) įverčių.

Literatūra

1. M.V. Fedoryuk. *The Saddle-Point Method*. Nauka, Moscow, 1977.
2. A. Krylovas, A. Štaras. Asymptotic integration of weakly non-linear systems with slowly varying coefficients. *Lith. Math. J.*, 24:125–130, 1985 (Vertimas iš *Liet. matem. rink.*, 2:90–94, 1984).
3. A. Krylovas. Stacionariosios fazės metodo taikymas silpnai netiesinių hiperbolinių sistemų asimptotiniam sprendimui. *Liet. matem. rink.*, 44(spec. nr.):164–168, 2004.
4. A. Krylovas. Applications of the method of stationary phase to asymptotic integration of weakly nonlinear hyperbolic systems. In: *Proceedings of the 10th International Conference MMA2005 & CMAM2*. Trakai, 441–446, 2005.
5. A. Krylovas. Silpnai netiesinės hiperbolinės sistemos asimptotinio sprendinio pagrindimas. *Liet. matem. rink.*, 46(spec. nr.):53–57, 2006.

6. A. Krylovas. Asymptotic method for approximation of resonant interaction of nonlinear multidimensional hyperbolic waves. *Math. Model. Anal.*, 13(1):47–54, 2008.
7. A.M. Samoilenko, R.I. Petrishin. Method of averaging in multifrequency systems with slowly varying parameters. *Ukr. Math. J.*, 40(4):425–431, 1988.

SUMMARY

A. Krylovas. Asymptotical estimation of oscillatory integral

The oscillatory integral is important for averaging of weakly nonlinear differential systems. Uniformly valid for parameters estimation of the integral can be use for substantiation of averaging method for wave interaction modelling.

Keywords: asymptotic methods, averaging, nonlinear waves.