*Liet. mat. rink. LMD darbai,* **50**, 2009, 30–35

# Periodinis pagal laiką antrojo laipsnio skysčio tekėjimas begalinėje juostoje

Neringa KLOVIENĖ
Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
el. paštas: kloviene@gmail.com

**Santrauka.** Straipsnyje nagrinėjamas ne-Niutoninio antrojo laipsnio skysčio periodinio pagal laiką tekėjimo Puzeilio tipo sprendinys begalinėje dvimatėje juostoje. Įrodytas sprendinio egzistavimas ir vienatis. Be to, gauti sprendinio įverčiai Sobolevo erdvėse. Parodyti sąryšiai tarp skysčio srauto ir slėgio gradiento.

*Raktiniai žodžiai:* antrojo laipsnio skysčiai, Puazeilio sprendinys, srauto sąlyga, Furjė eilutė.

## Įvadas

Begalinėje juostoje $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2) \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \times \mathbb{R}\}$, $d > 0$, nagrinėjamas periodinis laiko atžvilgiu ne-Niutoninio antrojo laipsnio skysčio tekėjimo uždavinys:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha\triangle\mathbf{u}) - \nu\triangle\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}\cdot\nabla\triangle\mathbf{u} + \nabla p = \nabla\cdot\mathbf{N}(\mathbf{u}), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Pi\times(0,2\pi)} = 0, \qquad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x,2\pi), \end{cases} \tag{1}$$

čia $\alpha$ ir $\nu$ yra teigiamos konstantos, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ aprašo skysčio tekėjimo greitį, $p$ – slėgį, $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \alpha(\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) - \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$, $A^T$ – matricos $A$ transponuota matrica.

(1) uždavinį nagrinėjame su papildomai duota srauto sąlyga

$$\int_{-d/2}^{d/2} u_2(x_1,t)\,\mathrm{d}x_1 = F(t), \tag{2}$$

kur srautas $F(t)$ yra periodinė funkcija

$$F(0) = F(2\pi).$$

Stacionarūs ir nestacionarūs pradiniai ir kraštiniai uždaviniai antrojo laipsnio skysčių tekėjimo lygtims buvo nagrinėti darbuose [3–6,8].

Šiame straipsnyje ieškomas (1)–(2) uždavinio Puazeilio tipo sprendinys $(\mathbf{u}; p)$ pavidalo

$$\mathbf{u}(x,t) = (0, U(x_1,t)), \qquad p(x,t) = -q(t)x_2 + p_0(t), \tag{3}$$

čia $p_0(t)$ yra bet kuri kintamojo $t$ funkcija, o $U(x_1,t)$ ir $q(t)$ periodinės laiko atžvilgiu funkcijos:

$$U(x_1,0)=U(x_1,2\pi), \quad q(0)=q(2\pi).$$

Įrašius (3) išraiškas į (1)–(2), funkcijoms $U(x_1,t)$ ir $q(t)$ gauname uždavinį intervale $(-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bigl(U-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\bigr)-\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}=q(t),\\ U\bigl(-\frac{d}{2},t\bigr)=U\bigl(\frac{d}{2},t\bigr)=0, \quad U(x_1,0)=U(x_1,2\pi),\\ \int_{-d/2}^{d/2}U(x_1,t)\,\mathrm{d}x_1=F(t). \end{cases} \tag{4}$$

Niutoninių skysčių tekėjimams (Navjė–Stokso lygtims) periodinis laiko atžvilgiu Puazeilio tipo sprendinys buvo rastas [2,7] darbuose. Žemiau pateikti įrodymai yra panašūs [7] straipsnyje pateiktiems įrodymams.

Straipsnyje naudojami standariniai Sobolevo erdvių žymėjimai $W_2^1$, $W_2^{1,1}$ ir t.t. (žr. pvz. [1]).

## 1. Pagalbiniai rezultatai

Tarkime, kad funkcija $q(t)$ yra žinoma ir panagrinėkime uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\bigl(U-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\bigr)-\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}=q(t),\\ U\bigl(-\frac{d}{2},t\bigr)=U\bigl(\frac{d}{2},t\bigr)=0, \quad U(x_1,0)=U(x_1,2\pi). \end{cases} \tag{5}$$

1 TEOREMA. *Tarkime $q\in L_2(0,2\pi)$ yra $2\pi$-periodinė funkcija. Tuomet egzistuoja vienintelis* (5) *uždavinio $2\pi$-periodinis sprendinys $U\in W_2^{2,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))$ ir yra teisingas įvertis*:

$$\|U\|_{W_2^{2,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))}+\left\|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right\|_{W_2^{1,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))} + \left\|\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_1^2}\right\|_{L_2((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))} \leqslant c\|q\|_{L_2(0,2\pi)}. \tag{6}$$

*Įrodymo schema.* Kadangi $q(t)$ yra periodinė funkcija ir $q\in L_2(0,2\pi)$, tai ją galima išreikšti Furjė eilute:

$$q(t)=\frac{q_0^{(c)}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(q_n^{(c)}\cos(nt)+q_n^{(s)}\sin(nt)\bigr). \tag{7}$$

Apytikslio (4) uždavinio sprendinio ieškome pavidalu:

$$U^{(N)}(x_1,t)=\frac{\varphi_0(x_1)}{2}+\sum_{n=1}^{N}\bigl(\varphi_n(x_1)\cos(nt)+\psi_n(x_1)\sin(nt)\bigr),$$

čia $\varphi_0(x_1)=\frac{q_0^{(c)}}{8\nu}(d^2-4x_1^2)$, o koeficientai $\varphi_n(x_1)$ ir $\psi_n(x_1)$, $n=1,2,\dots,N$, randami iš sistemų

$$\begin{cases}(\nu^2+\alpha^2n^2)\varphi_n''-\alpha n^2\varphi_n-n\nu\psi_n=\alpha nq_n^{(s)}-\nu q_n^{(c)},\\ (\nu^2+\alpha^2n^2)\psi_n''-\alpha n^2\psi_n+n\nu\varphi_n=-\nu q_n^{(s)}-\alpha nq_n^{(c)},\\ \varphi_n\big(-\frac{d}{2}\big)=\varphi\big(\frac{d}{2}\big)=0,\quad \psi_n\big(-\frac{d}{2}\big)=\psi\big(\frac{d}{2}\big)=0.\end{cases}$$

Lengva patikrinti, kad $U^{(N)}(x_1,t)$ tenkina uždavinį

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}(U^{(N)}-\alpha\frac{\partial^2U^{(N)}}{\partial x_1^2})-\nu\frac{\partial^2U^{(N)}}{\partial x_1^2}=q^{(N)}(t),\\ U^{(N)}(-\frac{d}{2},t)=U^{(N)}(\frac{d}{2},t)=0,\qquad U^{(N)}(x_1,0)=U^{(N)}(x_1,2\pi),\end{cases}$$

čia $q^{(N)}(t)=\frac{q_0^{(c)}}{2}+\sum\limits_{n=1}^{N}(q_n^{(c)}\cos(nt)+q_n^{(s)}\sin(nt))$.

Galima parodyti, jog yra teisingas įvertis

$$\|U^{(N)}\|_{W_2^{2,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))}+\left\|\frac{\partial U^{(N)}}{\partial x_1}\right\|_{W_2^{1,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))}$$
$$+\left\|\frac{\partial^2U_t^{(N)}}{\partial x_1^2}\right\|_{L_2((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))}\leqslant c\|q^{(N)}\|_{L_2(0,2\pi)}\leqslant c\|q\|_{L_2(0,2\pi)},$$

čia konstanta $c$ nepriklauso nuo $N$. Todėl pereinant prie ribos, kai $N\to\infty$ gaunamas (5) uždavinio sprendinys $U(x_1,t)$. Akivaizdu, kad (6) įvertis išlieka teisingas.

## 2. Sąryšis tarp srauto $F(t)$ ir slėgio gradiento $q(t)$

Paanalizuokime uždavinius:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\Big(U_n^{(c)}-\alpha\frac{\partial^2U_n^{(c)}}{\partial x_1^2}\Big)-\nu\frac{\partial^2U_n^{(c)}}{\partial x_1^2}=\cos(nt),\\ U_n^{(c)}\Big(-\frac{d}{2},t\Big)=U_n^{(c)}\Big(\frac{d}{2},t\Big)=0,\qquad U_n^{(c)}(x_1,0)=U_n^{(c)}(x_1,2\pi),\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}(U_n^{(s)}-\alpha\frac{\partial^2U_n^{(s)}}{\partial x_1^2})-\nu\frac{\partial^2U_n^{(s)}}{\partial x_1^2}=\sin(nt),\\ U_n^{(s)}(-\frac{d}{2},t)=U_n^{(s)}(\frac{d}{2},t)=0,\qquad U_n^{(s)}(x_1,0)=U_n^{(s)}(x_1,2\pi).\end{cases}\tag{9}$$

Tiesioginiais skaičiavimais galima gauti (8) ir (9) uždavinių sprendinius:

$$U_n^{(c)}(x_1,t)=\varphi_n(x_1)\cos(nt)-\psi_n(x_1)\sin(nt),$$
$$U_n^{(s)}(x_1,t)=\psi_n(x_1)\cos(nt)+\varphi_n(x_1)\sin(nt),\tag{10}$$

čia poros $(\varphi_n(x_1), \psi_n(x_1))$ yra stipriai elipsinių sistemų sprendiniai:

$$\begin{cases} -n\psi_n - \alpha n\psi_n'' - \nu\varphi_n'' = 1, \\ -n\varphi_n + \alpha n\varphi_n'' + \nu\psi_n'' = 0, \\ \varphi_n\big(-\frac{d}{2}\big) = \varphi_n\big(\frac{d}{2}\big) = 0, \\ \psi_n\big(-\frac{d}{2}\big) = \psi_n\big(\frac{d}{2}\big) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Iš stipriai elipsinių sistemų teorijos žinoma [1], kad kiekviena (11) sistema turi vienintelį sprendinį $(\varphi_n, \psi_n) \in W_2^2(-d/2, d/2) \cap W_2^1(-d/2, d/2)$.

Pažymėkime

$$a_n = \int_{-d/2}^{d/2} \varphi_n(x_1)\,\mathrm{d}x_1, \qquad b_n = -\int_{-d/2}^{d/2} \psi_n(x_1)\,\mathrm{d}x_1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

1 LEMA. *Tarkime* $(\varphi_n, \psi_n) \in W_2^2(-d/2, d/2) \cap W_2^1(-d/2, d/2)$ *yra* (11) *sistemos sprendinys. Tuomet yra teisinga nelygybė*:

$$\nu\|\varphi_n''\|^2_{L_2(-d/2,d/2)} + \nu\|\psi_n''\|^2_{L_2(-d/2,d/2)} \leqslant \frac{d}{\nu}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

*Skaičiai $a_n$ ir $b_n$ pasižymi savybėmis*:

(a) $a_n > 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$; $b_0 = 0$, $b_n > 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$;
(b) $a_n \geqslant \frac{d}{n}$, $b_n \geqslant \frac{d}{n}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$;
(c) $\lim_{n\to\infty}(nb_n) = d$.

Ši lema yra analogiška [7] straipsnyje Navjė–Stokso lygčių sistemai įrodytai lemai.

Tegul $q \in L_2(0, 2\pi)$ ir $U(x_1, t)$ yra (5) uždavinio sprendinys. Srautas $F(t) = \int_{-d/2}^{d/2} U(x_1, t)\,\mathrm{d}x_1$ yra periodinė funkcija ir $F \in L_2(0, 2\pi)$, todėl ją galima išreikšti Furjė eilute:

$$F(t) = \frac{F_0^{(c)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(F_n^{(c)} \cos(nt) + F_n^{(s)} \sin(nt)\big). \tag{14}$$

Remiantis (8)–(12) sąryšiais įrodoma

2 LEMA. *Funkcijų $q(t)$ ir $F(t)$ Furjė koeficientus $(q_n^{(c)}, q_n^{(s)})$ ir $(F_n^{(c)}, F_n^{(s)})$ sieja lygybės*:

$$F_n^{(c)} = a_n q_n^{(c)} - b_n q_n^{(s)}, \qquad F_n^{(s)} = b_n q_n^{(c)} + a_n q_n^{(s)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

*arba ekvivalenčiai*:

$$q_n^{(c)} = \frac{a_n F_n^{(c)} + b_n^{(s)}}{a_n^2 + b_n^2}, \qquad q_n^{(s)} = \frac{a_n F_n^{(s)} - b_n F_n^{(c)}}{a_n^2 + b_n^2}. \tag{16}$$

Iš 1 ir 2 lemų išplaukia

3 LEMA. *Tarkime* $(F_n^{(c)}, F_n^{(s)})$ *ir* $(q_n^{(c)}, q_n^{(s)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *yra susieti lygybėmis* (15) *arba* (16). *Jei* (7) *eilutė konverguoja erdvėje* $L_2(0, 2\pi)$ *į funkciją* $q \in L_2(0, 2\pi)$, *tuomet* (14) *konverguoja į* $F \in L_2(0, 2\pi)$. *Be to, yra teisingas įvertis:*

$$\|F\|_{L_2(0,2\pi)} \leqslant c_1 \|q\|_{L_2(0,2\pi)}.$$

*Ir priešingai, jei* (14) *eilutė konverguoja į funkciją* $F \in W_2^1(0, 2\pi)$, *tai* (7) *konveguoja į* $q \in L_2(0, 2\pi)$ *ir yra teisingas įvertis*

$$\|q\|_{L_2(0,2\pi)} \leqslant c_2 \|F\|_{W_2^1(0,2\pi)}. \tag{17}$$

*Konstantos* $c_1$ *ir* $c_2$ *priklauso tik nuo* $d$.

2 TEOREMA. *Tarkime* $F \in W_2^1(0, 2\pi)$ *yra* $2\pi$*-periodinė funkcija. Tada egzistuoja vienintelis* $2\pi$*-periodinis* (4) *sistemos sprendinys* $(U, q) \in W_2^{2,1}((-d/2, d/2) \times (0, 2\pi)) \times L_2(0, 2\pi)$. *Be to, yra teisingas įvertis*

$$\|U\|_{W_2^{2,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))} + \left\|\frac{\partial U}{\partial x_1}\right\|_{W_2^{1,1}((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))} + \left\|\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_1^2}\right\|_{L_2((-d/2,d/2)\times(0,2\pi))} \leqslant c\|F\|_{W_2^1(0,2\pi)}. \tag{18}$$

*Įrodymas.* Tarkime $F_n^{(c)}$ ir $F_n^{(s)}$ yra funkcijos $F(t)$ Furjė koeficientai. Funkciją $q(t)$ apibrėžkime (7) Furjė eilute su koeficientais $q_n^{(c)}$ ir $q_n^{(s)}$, duotais (16) formulėmis. Pagal 3 lemą, (7) eilutė konverguoja erdvėje $L_2(0, 2\pi)$ ir ribinė funkcija $q \in L_2(0, 2\pi)$. Be to, yra teisinga (17) nelygybė. Iš 1 teoremos žinome, kad (5) uždavinys turi vienintelį sprendinį $U \in W_2^{2,1}((-d/2, d/2) \times (0, 2\pi))$ ir jam teisingas (6) įvertis. Akivaizdu, kad $(U(x_1, t), q(t))$ yra (4) uždavinio sprendinys ir iš (6), (17) nelygybių išplaukia (18) įvertis.

Tarkime $F(t) = 0$. Padauginkime $(4_1)$ lygties abi puses iš $U(x_1, t)$, suintegruokime dalimis intervale $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ ir kintamojo t atžvilgiu nuo 0 iki $2\pi$:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \left|\frac{\partial U(x_1, t)}{\partial x_1}\right|^2 \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} q(t) \int_{-d/2}^{d/2} U(x_1, t)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} q(t)F(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Akivaizdu, kad $U(x_1, t) = 0$. Iš $(0.4_1)$ seka, kad $q(t) = 0$.

*Pastaba.* (4) uždavinio sprendinys gali būti išreikštas eilute:

$$U(x_1, t) = \frac{q_0^{(c)}}{2}\varphi_0(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \big(q_n^{(c)}\varphi_n(x_1) + q_n^{(s)}\psi_n(x_1)\big) \cos(nt) + \big(q_n^{(s)}\varphi_n(x_1) - q_n^{(c)}\psi_n(x_1)\big) \sin(nt) \Big),$$

čia funkcijos $\varphi_n(x_1)$, $\psi_n(x_1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, yra (11) stipriai elipsinių sistemų sprendiniai, o koeficientai $q_n^{(c)}$, $q_n^{(s)}$ apibrėžti (16) formulėmis.

## Literatūra


1. A. Amrazevičius, A. Domarkas. *Matematinės fizikos lygtys*, 2 dalis. Vilnius, 1999.
2. H. Beirao da Veiga. On time-periodic solutions of the Navier–Stokes equations in an unbounded cylindrical domains. Leray's problem for periodic flows. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 178(3):301–325, 2005.
3. D. Cioranescu, E.H. Quazar. Existence and uniqueness for fluids of second grade. In: *Note CRAS*, Nor. 298, Serie I, 285–287, 1984.
4. D. Cioranescu, E.H. Quazar. Existence and uniqueness for fluids of second grade. In: *Nonlinear Partiel Differential Equations*, *College de France Seminar*, Pitman, No. 109, 178–197, 1984.
5. G.P. Galdi, M. Grobbelaar-Van Dalsen, N. Sauer. Existence and uniqueness of classical solution of the equation of motion for second grade fluids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124:221–237, 1993.
6. G.P. Galdi, A. Sequeira. Further existence results for classical solution of the equation of a second grade fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 128:297–312, 1994.
7. G.P. Galdi, A.M. Robertson. The relation between flow rate and axial presure gradient for time-periodic Poiseuille flow in a pipe. *J. Math. Fluid Mech.*, 7(2):217–223, 2005.
8. K. Pileckas, A. Sequeira, J.H. Videman. A note on steady flows of non-newtonian fluids in channels and pipes.


SUMMARY

***N. Klovienė. Time periodic second grade fluid flow in an infinite strip***

Time periodic Poiseuille type solutions are studied for equations of the non-Newtonian second grade fluid in the two dimensional infinite strip. We prove the existence and uniqueness of the solution. Moreover, we obtain estimates of the solution in Sobolev spaces and show the relationships between the flux and the pressure drop.

*Keywords:* the second grade fluids, Poiseuille flow, flux condition, Fourier series.